Bilyana Zlatanovska
Limonka Koceva Lazarova
Marija Miteva
Teuta Yusufi – Zenku

MATEMATİK

SINIF I

ORTA MESLEKİ EĞİTİM

Meslekler:

Jeolojik-madencilik ve metalurjik, İnşaat-jeodezik, Grafik, İktisat-hukuki ve ticari, Elektro teknik, Kişisel hizmetler, Makine, Trafik, Tekstil - Dericilik, Konaklama-Turizm, Kimyasal teknoloji

MATEMATİK
SINIF I
ORTA MESLEKİ EĞİTİM
Meslekler:
Jeolojik-madencilik ve metalurjik, İnşaat-jeodezik, Grafik, İktisat-hukuki ve ticari, Elektro teknik, Kişisel hizmetler, Makine, Trafik, Tekstil - Dericilik, Konaklama-Turizm, Kimyasal teknoloji

Yazarlar:
Biljana Zlatanovska
Limonka Kotseva Lazarova
Maria Miteva
Teuta Yusufi Zenku

İnceleyenler:
Gjorgji Markoski
Biljana Yovanova
Yagoda Tanuşoska

İllüstrasyon:
Biljana Zlatanovska,
Limonka Kotseva Lazarova,
Maria Miteva
Teuta Yusufi Zenku

Orijinal baskının başlığı:
МАТЕМАТИКА
ЗА I ГОДИНА
СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ
Струки:
Геолошко-рударска и металуршка, Градежно-геодетска, Графичка, Економско-правна и трговска, Електротехничка, Лични услуги, Машинска, Сообраќајна, Текстилно-кожарска, Угостителско- туристичка, Хемиско технолошка
Билјана Златановска
Лимонка Коцева Лазарова
Марија Митева
Теута Јусуфи Зенку

Makedonca'dan Türkçe'ye çeviri
Abdülgani Ali

Lektör
Bedri Nuredin

Mesleki redaksiyon: Aybeyan Selim
Editör: İlker Ali

Grafik ve teknik tasarım: Leon Cingo, Evgeniya Pavlova – ARS STUDIO
Baskı: Evropa 92 - Koçani
Tiraj: 216

Yayımcı: Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı
Sk. "St.Kiril ve Metodi" No. 54, 1000 Üsküp

Başım yeri ve yılı: Üsküp, 2023

Orta mesleki eğitime ait birinci sınıf matematik ders kitabı: Jeolojik-madencilik ve metalurjik, İnşaat-jeodezik, Grafik, İktisat-hukuki ve ticari, Elektro teknik, Kişisel hizmetler, Makine, Trafik, Tekstil - Dericilik, Konaklama-Turizm, Kimyasal teknoloji ait, 15.04.2022 tarih ve 26-97/1 sayılı Ulusal ders kitabı komitesi kararıyla kullanıma müsaade edilmiştir.

ÖNSÖZ

Bu kitap Kuzey Makedonya Cumhuriyetinde orta meslek okulların I sınıfları için matematik dersine ait temel kitap olarak şu meslekler için: Jeolojik-madencilik ve metalurjik, İnşaat-jeodezik, Grafik, İktisat-hukuki ve ticari, Elektro teknik, Kişisel hizmetler, Makine, Trafik, Tekstil - Dericilik, Konaklama-Turizm, Kimyasal teknoloji öğrencilerine öngörülmüş, fakat kitapta bulunan modüler birimlerini incelemek isteyen herkese yardımcı olabilecektir.

Kitapta şu modüler birimler incelenmiştir:

- Matematiksel mantık ve kümeler
- Reel (Gerçek) sayılar
- Rasyonel cebirsel ifadeler
- Büyüklüklerin orantılılığı
- Lineer denklemler, eşitsizlikler ve lineer eşitsizlik sistemleri
- Lineer fonksiyon ve iki bilinmeyenli lineer denklem sistemi
- Düzlemde geometrik şekilleri
- Düzlemsel şekillerin alanı ve çevresi

Her modüler birimin içeriği, orta okullara matematik dersine ait öngörülen malzemeye uygun olarak incelenmiştir.

Her modüler birim, ders birimlerine ayrılmıştır. Ders birimleri bir ders için tasarlanmış olabilir, fakat ille de bir derste incelenecek diye katı bir kural yoktur. Bazı durumlarda öğretmen bir birimi iki ya da daha çok derse yayabilir.

Her modüler ünitenin, Eğitim ve Bilim ve Eğitim Geliştirme Bürosu bakanlığı tarafından öngörülen ve başında olması gereken hedefler listelenmiştir.

Öğretim birimlerinin her birinde işlenen yeni terimler açıkça belirtilir, yanı sıra aralarındaki bağlantılar ve bunları uygun örnekler ve çözülmüş alıştırmalar takip eder. Her ünitenin sonunda bağımsız çalışma için alıştırmalar vardır ve her ünitenin sonunda modüler ünite alıştırmaları modüler üniteyi tekrarlamak için verilmiştir.

Bu alıştırmaları çözerken, öğrenciler üzerinde çalıştıkları yeni içeriğe daha kolay hakim olacaklardır.

Kitabın sonunda kedi başına çözmek için alıştırmalara ait çözümler ve çözüme ait tavsiyeler verilmiş ve modüler birimlerini tekrarlamak için alıştırmalar verilmiştir.

Yazarlar

İÇİNDEKİLER

1

MATEMATİKTE MANTIK VE KÜMELER

MODÜLER BİRİMİN HEDEFLERİ

Bu modüler birimini incelemekle öğrenci şu kazanımları elde etmelidir:

- Basit ve bileşik önermelerin mantık değerlerini belirtmeyi;
- Mantık kanunlarını kullanmayı;
- Kümeleri farklı şekilde göstermeyi;
- Kümelerle işlemlerin yapılışını ve bazı kanunların ispatlamayı;
- Bazı basit önerme fonksiyonlarının çözüm kümeleri belirtmeyi.

MODÜLER BİRİM 1’ ÜN İÇİNDEKİLERİ

1. Önerme Kavramı

Her dilde çeşitli türden tümceler vardır: Bildirim cümleleri, soru cümleleri, emir cümleleri vb.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Her tümcenin anlamı var mıdır?
- Her iddia doğru mudur?

Çok kez şu biçimde tümcelere rastlıyoruz: "İtalya'nın başkenti Roma'dır". Bununla doğru olan bir iddia ifade edilmiştir. "İtalya'nın başkenti Venedik'tir" tümcesi ile doğru olmayan bir iddia ifade edilmiştir.

Bu tümceler bildirim tümceleridir ve her biri için, tümcede ifade edilen iddianın doğru olup olmadığına ait soru sorabiliriz. Bu gibi tümcelerin matematikte özel anlamı vardır, çünkü bunların tam bir doğruluk değeri vardır. Bu gibi tümcelerle matematikte ifadelerin tanımı yapılır.

Önerme kavramını tanımlayalım.

!

- ❖ Matematik mantığında önerme temel kavramdır.
- ❖ Anlamı olan ve doğru ya da yanlış olduğu kesinlikle belli olan bildirim tümcesine **önerme** denir.

- ❖ Önermeler genellikle: $p, q, r, s,$ ...gibi Latin alfabesinin küçük harfleriyle yazılıyorlar ve bunlara önerme değişkenleri deriz.

Örnek 1

1. p tümcesi: "55 çift sayıdır" bir önermedir, fakat yanlış önermedir.
2. q tümcesi: "Elma en lezzetli meyvedir" önerme değildir. Bu tümcenin bazıları için anlamı olabilir, çünkü bazıları elmayı çok beğeniyor, bazıları ise elmayı beğenmeyebilir. Demek ki bu tümcenin kesin anlamda doğruluk değeri yoktur.
3. r tümcesi " Üçgen parkta geziyor" önerme değildir. Bu tümcenin anlamı olmadığı açıktır.

- ➢ "Bence ….", " …. istiyorum.", "…. arzum vardır", "acaba …." gibi sözcükleriyle başlayan ya da biten tümceler önerme değildirler.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Neden bu tümceleri önerme olarak saymıyoruz?

Örnek 2 Aşağıdaki tümcelerden hangileri önerme olduğunu belirtiniz:

a) Saat kaçtır? – bu tümce önerme değildir, çünkü bu bir soru tümcesidir.

b) Üçgen bir bisikleti sürüyor – bu tümce önerme değildir, çünkü bunun anlamı yoktur.

c) $x = 1$ için, $2x + 3 < 4$ tür – bu tümce önermedir.

d) $2 \cdot 5 + 14 = 24$ – bu tümce önermedir.

1.1. Mantık Değerin Belirtilmesi

Her önerme için gerçek (doğru) ya da (yanlış) gerçek olmadığını belirleyebildiğimize göre, biz önermenin doğruluk değerini belirtebiliriz.

- ❖ τ (oku: tau) fonksiyonu yardımıyla verilen bir önermenin **mantık (doğruluk) değeri** işaret edilir.

  Örnek, $\tau(p)$ ile p **önermesinin doğruluk değeri** işaret edilir.

Şu işaretleri kullanacağız:
Doğru için - (oku: “doğru”) ve doğru olmayan için - $\perp$ (oku: “yanlış”). p önermesi gerçek ise $\tau(p) =$ T ve “tau p doğrudur”, p doğru değilse $\tau(p) = \perp$ ve “tau p yanlıştır” diye okuyoruz.

Örnek 3 r : “ 2 < 3” tümcesi doğru önermedir, o halde $\tau(r) =$ T.

Örnek 4 Şu önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) 3 doğal sayıdır; b) $3^3 = 27$;

c) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$; ç) $2^2 \neq 4$.

a) τ (3 doğal sayıdır) = T; b) $\tau\left(3^3 = 27\right) =$ T; c) $\tau\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\right) = \perp$; ç) $\tau\left(2^2 \neq 4\right) = \perp$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen tümcelerden hangileri önerme olduğunu belirtiniz:

a) Yarın kar yağacağını tahmin ediyorum. b) Demir bir metaldir.

c) Dağ horon tepiyor. ç) 0 doğal sayıdır.

2. Şu tümceler neden önerme olmadığını açıklayınız:

a) Kış, en güzel mevsimdir.

b) Vardar ırmağı Ohru'dan geçmesini arzu ediyorum.

c) 3 sayısı arabayı sürüyor.

ç) Lütfen kapıyı açar mısın!

3. Verilen önermelerden hangileri doğru olduğunu belirtiniz:

a) $2-7=7-2$; b) $\frac{1}{2}=0,5$; c) Bir yılda 13 ay vardır. ç) $3 \cdot 2 < 10-3$.

4. Verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) p: Üsküp Kuzey Makedonya Cumhuriyetinin baş kentidir.

b) $q: (3)^3 = (-3)^3$; c) r: 24 sayısı 6 ile bölünür; ç) $s: -3 < -2$.

5. Aşağıdaki tabloda verilen her önermenin doğruluk değerini (T ve $\perp$ işaretlerini kullanarak) belirtiniz:

x	**-2**	**-1**	**1**	**2**
$\tau(x<3)$				
$\tau(x^2=4)$				
$\tau(x+1>2)$				

2. Değilleme. Tümel evetleme. Tikel evetleme. Ya, ya da tikel evetlemesi

Her dilde yeni bileşik tümcelerin oluşturulmasında birçok bağlaçların var olduğunu biliniyor. İki ya da daha fazla basit tümceden çeşitli bağlaçlar kullanarak bileşik tümceler oluşturabiliriz.

Matematikte de iki ya da daha fazla önermeyi bileştiren bağlaçlar vardır. Matematikte kullanılan daha önemli bağlaçlar şunlardır: "ve", "veya", "ise" "eğer … ise" "ancak ve ancak", "ya yada" ve "değil".

Düşününüz ve cevaplayınız!

- İki önermeyi yukarıda sayılan bağlaçlardan biri ile birleştirebilir miyiz?
- Nasıl tümceler elde edilecektir?

- “ve”, “veya”, “ise” “eğer … ise” “ancak ve ancak”, “ya yada” ve “değil” bağlaçları yardımıyla önerme olan bileşik tümceler elde oluşturulabilir. Bu önermelere **bileşik önermeler** denir.
- Yukarıda adı geçen bağlaçlardan hiçbirini içermeyen, yani sadece bir yargıyı taşıyan önermelere **temel** ya da **basit önermeler** denir.

Örnek 1 p : “55 sayısı çift sayıdır” ve q: “56 sayısı çift sayıdır” önermeleri basit önermelerdir. r: “55 sayısı çift sayıdır ve 56 sayısı çift sayıdır” önermesi ise p ve q önermelerinden “ve” bağlacıyla elde edilen bileşik önermedir.

1 p : “5 sayısı asal sayıdır”, q:”5 sayısı çift sayıdır” önermelerinden

a) ve; b) veya; c) ise; ç) ancak ve ancak

bağlacını kullanarak bileşik önerme oluşturunuz.

2 Şu önermelerden hangileri basit, hangileri ise bileşik önermedir?

a) Yağmur yağarsa yollar ıslanır.

b) Kare düzgün dörtgendir veya paralelkenardır.

c) 5 asal sayıdır.

ç) Bir sayının son rakamı 5 ya da 0 ise, o sayı 5 ile bölünür.

d) Vardar ırmağının kaynağı Vurtok köyündedir.

Not: Basit önermelerin tam bir doğruluk değeri vardır. Bileşik önermelerin doğruluk değeri ise, oluştuğu basit önermelerin doğruluk değerlerine ve oluşumda kullanılan bağlaca bağlıdır.

2.1. Değilleme

Değillemeyi tanımlayalım.

- p önermesi verilmiş olsun. “değil p” önermesine ($\neg p$ ile işaret edilir) p önermesinin **değili** denir.

  p önermesi yanlış olduğu durumda “değil p” önermesi doğrudur, p önermesi doğru olduğu durumda “değil p” yanlıştır.

Genellikle “değil” sözcüğü fiil yanında olduğundan $\neg p$ yi telaffuz ederken “değildir 3 çift sayı“ yerine “3 çift sayı değildir” diye okunur.

Verilen bir p önermesinin değilinin nasıl yapıldığını görelim.

Örnek 2 "Bugün pazartesidir" önermesinin değili "Bugün pazartesi değildir" ya da "Bugün pazartesi demek doğru değildir".

Değillemenin doğruluk değerini şu tablo ile gösterebiliriz.

p	$\neg p$
T	$\perp$
$\perp$	T

Örnek 3 Şu önermelerin değilini yazalım:

a) Sara tenis oynuyor; b) $5>7$; c) $3\,|\,9$.

a) $\neg$(Sara tenis oynuyor) = Sara tenis oynamıyor.

b) $\neg(5>7)=5\leq 7$;

c) $\neg(3\,|\,9)=3\nmid 9$.

Örnek 4 Şu önermelerin değilini yazalım ve onların doğruluk değerini belirtelim:

a) $p:3\neq 3$; b) $q:-2\leq 3$; c) r: 6 asal sayıdır.

a) $\neg p:3=3,\ \tau(\neg p)=$ T.

b) $\neg q:-2>3,\ \tau(\neg q)=\perp$.

c) $\neg r:\neg r$: 6 asal sayı değildir, $\tau(\neg r)=$ T.

3 Verilen önermeleri değilleyiniz ve doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) 7 çift sayıdır; b) Her dörtgen yamuktur;

c) $2+3=5$; ç) 17 sayısı 4 ile bölünür;

d) $2>-1$; e) 5 sayısı 100'ün bölenidir.

2.2. Tümel evetleme (Konyuksiyon)

Tümel evetlemeyi tanımlayalım.

❖ İki basit önermeyi "**ve**" bağlacıyla birleştirerek oluşturulan bileşik önermeye **tümel evetleme** denir.

p ve q iki basit önerme olsun. p ve q önermelerinin tümel evetlemesini $p \wedge q$ ile işaret ediyoruz ("p ve q" diye okuyoruz).

Örnek 5 p: 7 tam sayıdır ve q: 7 tek sayıdır önermelerinin tümel evetlemesi $p \wedge q$: 7 tam sayıdır ve 7 tek sayıdır diye ifade edilir.

Tümel evetlemenin tanımına göre ve örnek 5' ten görüldüğü gibi, tümel evetleme iki basit önermenin "ve" bağlacıyla bağlanmasıyla oluşan bir bileşik önermedir.

❖ Tümel evetlemenin doğruluk değeri, ancak her iki önerme doğru olduğu durumda doğrudur, diğer durumlarda önerme yanlıştır.

Tümel evetlemenin doğruluk değerini tablo yardımıyla da gösterebiliriz.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥

Örnek 6 p: 2^3 bileşik sayıdır, $q: \frac{1}{2} > 8$ ve r: x = 3 için $x + 5 = 10 - 2$ önermeleri verilmiş olsun. Şu önermeleri oluşturunuz:

a) $p \wedge q$; b) $p \wedge r$; c) $q \wedge r$, ondan sonra onların doğruluk değerini belirtiniz.

a) $p \wedge q$: 2^3 bileşik sayıdır ve $\frac{1}{2} > 8, \tau(p \wedge q) = \tau(p) \wedge \tau(q) = \text{T} \wedge \perp = \perp$.

b) $p \wedge r$: 2^3 bileşik sayıdır ve $x = 3$ için $x + 5 = 10 - 2$ dir, $\tau(p \wedge r) = \tau(p) \wedge \tau(r) = \text{T} \wedge \text{T} = \text{T}$.

c) $q \wedge r$: $\frac{1}{2} > 8$ ve $x = 3$ için $x + 5 = 10 - 2$ dir, $\tau(q \wedge r) = \tau(q) \wedge \tau(r) = \perp \wedge \text{T} = \perp$.

4 Verilen tümel evetlemelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $(2>5) \wedge (3<9)$; b) $(3\frac{2}{5} = 2) \wedge (4 - 1 = 4)$; c) $(3+2=4) \wedge (9\text{-}5=4)$;

ç) 17 sayısı 4 ile bölünür ve 5 sayısı 0' dan küçüktür.

2.3. Tikel evetleme

Tikel evetlemeyi tanımlayalım.

> ❖ İki basit önermeyi “**veya**” bağlacıyla birleştirerek oluşturulan bileşik önermeye **tikel evetleme** denir.
>
> p ve q iki basit önerme olsun. p ve q önermelerinin tikel evetlemesini $p \vee q$ ile işaret ediyoruz (“p veya q” diye okuyoruz).

Örnek 7 p : 16 çift sayıdır ve q : 16 sayısı 4 ile bölünür önermelerin tikel evetlemesi $p \vee q$: 16 çift sayıdır veya 16 sayısı 4 ile bölünür biçiminde ifade edilir.

Tikel evetleme mantık işlemiyle oluşan bileşik önermenin doğruluk değeri için şu kural geçerlidir:

> ❖ Tikel evetlemenin doğruluk değeri, ancak her iki önerme yanlış olduğu durumda yanlıştır, diğer durumlarda önerme doğrudur.

Tikel evetlemenin doğruluk değerini tablo yardımıyla da gösterebiliriz:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

Örnek 8 $p: 4 \cdot 3 = 7 - 4$, $q: 4 \cdot 3 \cdot 0 = 6$ ve r: 4 tam sayıdır. Şu önermeleri oluşturunuz:

a) $p \vee q$; b) $p \vee r$; c) $q \vee r$,
ondan sonra onların doğruluk değerlerini belirtiniz.

a) $p \vee q : 4 \cdot 3 = 7 - 4$ veya $4 \cdot 3 \cdot 0 = 6$, $\tau(p \vee q) = \tau(p) \vee \tau(q) = \perp \vee \perp = \perp$.

b) $p \vee r : 4 \cdot 3 = 7 - 4$ veya 4 tam sayıdır, $\tau(p \vee r) = \tau(p) \vee \tau(r) = \perp \vee \top = \top$.

c) $q \vee r : 4 \cdot 3 \cdot 0 = 6$ veya 4 tam sayıdır, $\tau(q \vee r) = \tau(q) \vee \tau(r) = \perp \vee \top = \top$.

5 Verilen tikel evetlemelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $(12 > 5)$ ∨ ($x = 3$ için, ($x^2 = 1$' dir); b) $(\frac{5}{8} + 2\frac{1}{8} = \frac{31}{8}) \vee (6,39 - 1\frac{1}{4} = 3)$;

c) $(3 \cdot 2 - 1 = 5)$ ∨ $(6^2 = 36)$ ç) 0,5 irasyonel sayıdır veya 5 rasyonel sayıdır.

6 p, q ve r önermeleri veriliyor:
p : Şardağlı Makedonya köpeğidir;
q : Benim küçük bir avlum vardır;
r : Benim büyük şardağlım vardır.

Simgelerle verilen ifadeleri tümceler biçiminde yazınız:

a) $p \wedge q \wedge r$; b) $(p \vee \neg q) \wedge r$; c) $\neg q \wedge r$.

2.4. Ya-ya da tikel evetlemesi

Ya-ya da tikel evetlemesini tanımlayalım.

> ❖ İki basit önermeyi "**ya-ya da**" bağlacıyla birleştirerek oluşturulan bileşik önermeye **tikel evetleme** denir.
>
> p ve q iki basit önerme olsun. p ve q önermelerinin ya da tikel evetlemesini $p \veebar q$ ile işaret ediyoruz ("p ya-ya da q" diye okuyoruz).

Örnek 9 $p: 4 \neq 2$ ve $q: \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ önermelerinin tikel evetlemesi: $p \veebar q$: ya $4 \neq 2$ ya da $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ dir.

Ya-ya da tikel evetleme mantık işlemiyle oluşan bileşik önermenin doğruluk değeri için şu kural geçerlidir:

> ❖ Ya-ya da tikel evetlemenin doğruluk değeri, ancak her iki önermenin farklı doğruluk değeri olduğu durumda doğrudur, diğer durumlarda önerme yanlıştır.

Ya-ya da tikel evetlemenin doğruluk değerini tablo yardımıyla da gösterebiliriz:

p	q	$p \veebar q$
T	T	$\bot$
T	$\bot$	T
$\bot$	T	T
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Örnek 10 $p: 2+7 \leq 5 \cdot 4$, $q: 7 \mid 21$ ve $x = 7$ için $r: 3x \neq 21$ önermeleri verilmiş olsun. Şu önermeleri oluşturunuz:

a) $p \veebar q$; b) $p \veebar r$; c) $q \veebar r$;

ondan sonra onların doğruluk değerlerini belirtiniz.

a) $p \veebar q$: ya $2+7 \le 5\cdot 4$ ya da $7|21$, $\tau(p \veebar q) = \tau(p) \veebar \tau(q) =$ T $\veebar$ T $= \perp$.

b) $p \veebar r$: ya $2+7 \le 5\cdot 4$ ya da $3x \ne 21$ dir, $x = 7$, $\tau(p \veebar r) = \tau(p) \veebar \tau(r) =$ T $\veebar \perp =$ T.

c) $q \veebar r$: ya 7| 21 ya da x = 7 için $3x \ne 21$ dir, $x = 7$, $\tau(q \veebar r) = \tau(q) \veebar \tau(r) =$ T $\veebar \perp =$ T.

7 Şu önermelerin doğruluk değerinin belirtiniz:

a) $(2<6) \veebar (2|6)$;

b) $(2+3=5) \veebar (5-3=2)$;

c) $(3\cdot 2+1=5) \veebar (6^2=45)$;

ç) ya 3|9 ya-da 3|8/

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen önermelerin değilini yazınız:
a) Bugün cumadır; b) $-3 \ge 5$; c) 10 negatif sayıdır; ç) $\frac{1}{5} \ne \frac{1}{3}$.

2. Verilen önermelerin değilini yazınız, ondan sonra elde edilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) p : uzunluk temel ölçü birimi metredir;
b) q: 9 sayısı 37 nin bölenidir;
c) $r : 2+7 \ne 9$; ç) $s : 7 < 3$.

3. p: 5 doğal sayıdır, $q : -2 > 3$ ve r: 3|9. Şu tümel evetlemeleri oluşturunuz:

a) $p \wedge q$; b) $p \wedge p$; c) $q \wedge r$; ç) $r \wedge p$.

4. p: 8 asal sayıdır, q : x = 1 için, x + 3 = 5 dir, ve r: 2|7 önermeleri verilmiş olsun. Şu önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $p \wedge \neg q$; b) $r \wedge \neg p$; c) $(\neg p \wedge \neg r) \wedge q$; ç) $\neg(p \wedge q) \wedge r$.

5. "5 sayısı asaldır ve tek sayıdır" tümcesi verilmiş olsun. Bu tümceye ait basit önermeleri belirtiniz.

6. Verilen önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $\tau(5>3 \wedge 3|18)$; b) $\tau(3^2=6 \wedge 2^3=6)$;

c) $\tau\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{10} \wedge \frac{1}{5}<\frac{1}{2}\right)$; ç) τ(-2 negatif sayıdır ∧ -2 = 2 dir).

7. $p : |-3| = -3$, $q : \frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$ ve $r : 5 \ge 7$. önermeleri verilmiş olsun. Şu tikel evetlemeleri oluşturunuz:

a) $p \vee q$; $p \vee p$; $q \vee r$; $r \vee p$.

8. p: Kenarı a olan karenin alanı a^2 dir, q: 5 – 7 = - 2 ve $r : 2^2 \cdot 2^3 = 2^6$. önermeleri verilmiş olsun. Şu önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $p \vee \neg q$; b) $r \vee \neg p$; c) $(\neg p \vee \neg r) \vee q$; ç) $\neg(p \vee q) \vee r$.

9. Verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $\tau(5 \mid 25 \vee 2 \nmid 20)$; b) $\tau(7+3 \neq 10 \vee 3 > -1)$; c) $\tau\left(\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \vee 4^2 = 8\right)$;

ç). τ (Bir çokgenin alanı negatif sayıdır $\vee$ $|-2| = 2$).

10. Verilen önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $(3 \neq 2 \wedge 2 < -1) \vee$ (veya 36 sayısı 6 ile bölünür);

b) $\left(\frac{5}{5} = 1 \vee 5 - 6 = 1\right) \wedge \left(\frac{2}{3} < \frac{1}{2}\right)$;

c) $(10 = 5 \cdot 2 \wedge 6 > 6) \vee \neg(6^2 = 36)$;

ç) $\neg\left(4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \vee -2 > 3\right) \wedge$ ($x = 2$ için, $x + 5 = 7$ dir).

11. p: Paralelkenarın hiçbir çift paralel kenarı yoktur, q: $14 \neq 2 \cdot 7$ ve $7 - 7 = 0$ önermeleri verilmiş olsun. Aşağıdaki ya – ya da tikel evetlemeleri oluşturunuz:

a) $p \veebar q$; b) $r \veebar r$; c) $q \veebar r$; ç) $r \veebar p$.

3. Gerektirim (Koşullu Önerme). Çift Gerektirim (Karşılıklı Koşullu Önerme)

3.1. Gerektirim (Koşullu Önerme)

Bağımlı bileşik tümceler arasında, matematik mantığında koşullu tümcelerin özel bir önemi vardır. Tümcenin koşul kısmında tümcede yapılacak fiilin hangi şartlar altında yapılması gerektiğini yani koşulu veriliyor. Koşullu tümceler yardımıyla matematik mantığında gerektirim tanımlanmaktadır.

Gerektirimi tanımlayalım.

!

❖ “eğer …ise” bağlacıyla bağlı olan iki basit önermeden elde edilen bileşik önermeye **gerektirim (koşullu önerme)** denir.

p ve q iki basit önerme olsun, p ve q önermelerinin gerektirimi $p \Rightarrow q$ ile işaret edilir (“eğer p, o halde q” , “p den q gerekir”, “p gerektirir q” biçiminde okunur v.b.)

Örnek 1 p: 2 + 0 = 2 ve q: 2 | 14 önermelerinin koşullu önermesi: $p \Rightarrow q$: 2 + 0 = 2 ise 2 |14 gerekir.

!

❖ Birinci bileşen doğru, ikinci bileşen ise yanlış olduğu durumda, koşullu önerme (gerektirim) yanlıştır, diğer tüm durumlarda koşullu önermenin doğruluk değeri doğrudur.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

Örnek 2 p: 15 sayısı 5 ile bölünür, q: 5 > - 2 ve $r: x = 2$ için, -2x = 5 dir önermeleri verilmiş olsun. Şu önermeleri oluşturunuz:

a) $p \Rightarrow q$; b) $p \Rightarrow r$; c) $q \Rightarrow r$;

ondan sonra onların doğruluk değerini belirtiniz.

a) $p \Rightarrow q$: sayısı 5 ile bölünürse 5>-2 dir, $\tau(p \Rightarrow q) = \tau(p) \Rightarrow \tau(q) = \text{T} \Rightarrow \text{T} = \text{T}$.

b) $p \Rightarrow r$: 15 sayısı 5 ile bölünürse x=2 için, -2x=5 dir, $\tau(p \Rightarrow r) = \tau(p) \Rightarrow \tau(r) = \text{T} \Rightarrow \perp = \perp$.

c) $q \Rightarrow r$: 15 ise x=2 için, -2x=5 dir, $\tau(q \Rightarrow r) = \tau(q) \Rightarrow \tau(r) = \text{T} \Rightarrow \perp = \perp$.

1 Verilen koşullu önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $(2<5) \Rightarrow (2|17)$; b) $(2+3 \neq 5) \Rightarrow (5-3 \neq 2)$;

c) $(3 \cdot 2 - 1 = 5) \Rightarrow (6^2 = 36)$; ç) 3|7 ise 3|8 gerekir.

Matematik mantığında koşullu önerme ile daha üç yeni bileşik önerme bağıntılıdır. Yani $p \Rightarrow q$ gerektirimi verildiğinde, şu üç bileşik önermeyi oluşturabiliriz:

$q \Rightarrow p$ - $p \Rightarrow q$ önermesinin dönüşümü;

$\neg p \Rightarrow \neg q$ - $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi;

$\neg q \Rightarrow \neg p$ - $p \Rightarrow q$ önermesinin karşı pozisyonu;

2 $p \Rightarrow q$ koşullu önermenin dönüşümünün, tersinin ve karşı pozisyonunun doğruluk tablolarını oluşturunuz.

3 p, q ve r önermeleri veriliyor:

p: Arkadaşım yeni araba alacaktır.

q: Arkadaşım parti düzenliyor.

r: Arkadaşım lotoda kazanacaktır.

Şu tümceleri sembollü ifadeler gibi yazınız:

a) Arkadaşım lotoda kazanırsa, yeni bir araba alacak ve parti düzenleyecektir.

b) Arkadaşım yeni bir araba almazsa, parti düzenlemeyecektir.

c) Arkadaşım lotoda kazanmazsa ya da yeni bir araba almazsa, parti de düzenlemeyecektir.

Koşullu önerme biçiminde, matematikte çok sayıda iddialar ve teoremler yazılmıştır.

4 Koşullu önerme biçiminde önceden bildiğiniz iki teoremi ifade ediniz.

3.2. Karşılıklı koşullu önerme (çift gerektirim)

İki yönde koşullu önermenin tanımlanmasıyla, çift gerektirim ya da karşılıklı koşullu önermeyi tanımlıyoruz. $p \Rightarrow q$ gerektirimi ve ona ters $q \Rightarrow p$ gerektirimi tanımlamakla karşılıklı koşullu önermenin tanımına varıyoruz.

Karşılıklı koşullu önermeyi tanımlayalım.

!

❖ p ve q basit önermelerini "ancak ve ancak" bağlacıyla bağlamakla elde edilen bileşik önermeye **karşılıklı koşullu önerme** denir.

p ve q iki basit önerme olsun. O halde p ve q önermelerinin karşılıklı koşullu önermesini $p \Leftrightarrow q$ biçiminde işaret ediyoruz (oku: "p ancak ve ancak q", "p, q ile denktir" vb.).

Örnek 3 $p: \frac{1}{2}$ rasyonel sayıdır ve q: EBOB $(12,16) = 4$ önermelerinin karşılıklı koşullu önermesi: $p \Leftrightarrow q: \frac{1}{2}$ rasyonel sayıdır ancak ve ancak EBOB $(12,16) = 4$.

Karşılıklı koşullu önerme biçiminde bileşik önermenin doğruluk değeri için şu özellik geçerlidir:

!

❖ Her iki bileşenin doğruluk değeri aynı olduğu durumda, karşılıklı koşullu önermenin doğruluk değeri doğrudur, diğer iki durumda doğruluk değeri yanlıştır.

Karşılıklı koşullu önermenin doğruluk değerini tablo ile de gösterebiliriz.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	T

Örnek 4 $p: \frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$, $q: 3^2 > 2^3$ ve $r: -2\cdot 3 = -6$ önermeleri verilmiş olsun. Şu önermeleri oluşturunuz:

a) $p \Leftrightarrow q$; b) $p \Leftrightarrow r$; c) $q \Leftrightarrow r$;

ondan sonra onların doğruluk değerlerini belirtiniz.

a) $p \Leftrightarrow q: \frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$ ancak ve ancak $3^2 > 2^3$, $\tau(p \Leftrightarrow q)=\tau(p) \Leftrightarrow \tau(q) = \perp \Leftrightarrow$ T$=\perp$.

b) $p \Leftrightarrow r: \frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$ ancak ve ancak $-2\cdot 3=-6$, $\tau(p \Leftrightarrow r)=\tau(p) \Leftrightarrow \tau(r) = \perp \Leftrightarrow$ T $=\perp$.

c) $q \Leftrightarrow r: 3^2 > 2^3$ ancak ve ancak $-2\cdot 3=-6$, $\tau(q \Leftrightarrow r)=\tau(q) \Leftrightarrow \tau(r) =$ T$\Rightarrow$T = T.

5 Verilen karşılıklı koşullu önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $(2<6) \Leftrightarrow (2 \mid 6)$; b) $(2+3 \neq 5) \Leftrightarrow (5-3 \neq 2)$;

c) $(3\cdot 2-1=5) \Leftrightarrow (6^2=36)$; ç) 3|7 ancak ve ancak 3|8

6 p, q ve r önermeleri veriliyor:

p – O en iyi öğrencidir.

q – O arkadaşları arasında seviliyor.

r – O her eğlence partisine gidiyor.

Simge halinde verilmiş olan aşağıdaki ifadelere karşılık gelen tümceleri yazınız:

a) $q \Leftrightarrow (p \wedge r)$; b) $q \Leftrightarrow r$; c) $\neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee r)$.

!

❖ Değilleme ($\neg$), tümel evetleme ($\wedge$), tikel evetleme ($\vee$), ya-ya da tikel evetleme ($\underline{\vee}$), koşullu önerme ($\Rightarrow$), karşılıklı koşullu önerme ($\Leftrightarrow$) işlemlerine mantık işlemleri denir.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. $p:\frac{1}{4}=0,25$ Tuna ırmağı Üsküp'ten geçer; ve $r:\sqrt{2}$ irasyonel sayıdır önermeleri verilmiş olsun. Şu koşullu önermeleri oluşturunuz:

a) $p\Rightarrow q$; b) $q\Rightarrow q$; c) $q\Rightarrow r$; ç) $r\Rightarrow p$.

2. $p:\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$ $q: x=-2$ için $2x=4$ ve r: 9 sayısı bileşik sayıdır önermeleri verilmiş olsun. Şu önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $p\Rightarrow\neg q$; b) $\neg p\Rightarrow r$; c) $(\neg p\Rightarrow\neg r)\Rightarrow q$; ç) $\neg(p\Rightarrow q)\Rightarrow r$.

3. Verilen önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $\tau(3>-2\Rightarrow -2<1)$; b) $\tau(2\neq 3\Rightarrow -5=5)$;

c) $\tau(2^6=12\Rightarrow 7^2=14)$; ç) $\tau(2+0=2\Rightarrow 2-0=-2)$.

4. Doğru önerme yuvarlak içine alarak işaretleyiniz:

a) p den q gerekir ifadesi değillemedir;
b) p den q gerekir ifadesi karşılıklı koşullu önermedir;
c) p den q gerekir ifadesi tikel evetlemedir;
ç) p den q gerekir ifadesi koşullu önermedir;

5. Şu ifadelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $(\top\wedge\bot)\vee\bot$; b) $\neg(\top\vee\top)\wedge\bot$;

c) $(\bot\wedge\top)\Rightarrow\neg\bot$; ç) $(\bot\vee\bot)\Leftrightarrow(\neg\top\wedge\neg\bot)$.

6. p: -1 pozitif sayıdır, $q: 4>2$ ve $r: 2\cdot 3-6=0$ önermeleri verilmiş olsun. Şu karşılıklı koşullu önermeleri oluşturunuz:

a) $p\Leftrightarrow q$; b) $q\Leftrightarrow q$; c) $q\Leftrightarrow r$; ç) $r\Leftrightarrow p$.

7. p: Dörtgende iç açıların toplamı 360° dir, $q: |3+2|=5$ ve $r: 2\,|\,48$ önermeleri verilmiş olsun. Şu önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $p\Leftrightarrow\neg q$; $r\Leftrightarrow\neg p$; $(\neg p\Leftrightarrow\neg r)\vee q$; $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow r$.

8. Verilen önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $\tau(3\,|\,20\Leftrightarrow 3-2\cdot 1=1)$; b) $\tau\left(3=3\Leftrightarrow 2=\frac{6}{3}\right)$; c) $\tau(-2>2\Leftrightarrow 6^2=12)$;

$\tau\left(\text{Boyutları } a \text{ ve } b \text{ olan dikdörtgenin alanı } a\cdot b \text{ sayısıdır}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\right)$.

9. $p: 5\text{-}5\cdot 0=0$, $q:\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ve r: Paralelkenarın karşıt kenarları birbirine eşittir, önermeleri verilmiş olsun.

Şu önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $p\underline{\vee}\neg q$; b) $r\underline{\vee}\neg p$; c) $(\neg p\underline{\vee}\neg r)\Rightarrow q$; ç) $\neg(p\Leftrightarrow q)\underline{\vee} r$.

10. Verilen önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $(\top \Leftrightarrow \top) \wedge \perp$; c) $\neg(\perp \veebar \top) \Leftrightarrow \perp$;

b) $(\neg\top \Rightarrow \top) \vee \neg\perp$; ç) $(\perp \Leftrightarrow \top) \veebar (\neg\perp \Rightarrow \neg\top)$.

11. p, q ve r önermeleri veriliyor:

p: O programcıdır.

q: O suç filmleri izliyor.

r: O bilgi yarışmalarına katılıyor.

Şu tümceleri simgelerle ifade ediniz.

a) O bilgi yarışmalarına katılır ve suç filmleri izliyorsa, o halde o bir programcıdır.

b) O bilgi yarışmalarına katılmıyorsa ve suç filmleri seyretmiyorsa, o halde o programcı değildir.

c) O suç filmleri izliyorsa, o halde bilgi yarışmasına katılır; ve suç filmleri izlemezse, o halde o bir programcıdır.

4. Önerme Formülleri

Bir aritmetik ifadesinde sayılar $-25 + 2 \cdot (25 - 5 : 5)$ ifadesinde olduğu gibi, toplama (+), çıkarma (-), çarpma (·) ve bölme (:) gibi aritmetik işlemleriyle bağlı olarak elde edilen ifadeler bileşik aritmetik ifadedir.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- p, q, r, ... önerme değişkenleri ve değilleme ($\neg$), tümel evetleme ($\wedge$), tikel evetleme ($\vee$), ya-ya da tikel evetleme ($\veebar$), koşullu önerme ($\Rightarrow$), karşılıklı koşullu önerme ($\Leftrightarrow$) mantık işlemlerini kullanarak bileşik mantık ifadesi oluşturabilir miyiz?
- Mümkünse örnek gösteriniz!

Önerme formüllerini tanımlayalım.

1) $p, q, r, s,$ ...vb. önerme değişkenleri ve T ve $\perp$ sabitleri önerme formülleridir.

2) A ve B önerme formülleri ise $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(A \veebar B)$ ifadeleri de önerme formülleridir.

3) **Önerme formülleri** ancak 1) ve 2) kuralların sonlu sayıda uygulanmasıyla oluşturulabilirler.

Matematik mantığında **önerme formülleri** diye adlandırılan bileşik ifadeler doğru ya da yanlış olabilirler.

Bileşik önerme formüllerini oluştururken birçok mantık işlemi kullanılır. Aritmetikte olduğu gibi matematik mantığında da, mantık işlemlerin hangi sıraya göre yapılmasını bilmemiz önemlidir. Bu şekilde, bileşik önerme formüllerin yazılışında en az parantezlerin kullanılmasını sağlamaktadır.

Mantık işlemlerinin yapılma sırasıyla ilgili şunları bilmemiz gerekir:

❖ Bir önerme formülünde tüm mantık işaretleri kullanılmış fakat parantezler yoksa, işlemler şu sıraya göre yapılmalıdır:

1) $\neg$; 2) $\wedge$; 3) $\vee$; 4) $\veebar$; 5) $\Rightarrow$; 6) $\Leftrightarrow$.

Örnek 1 Şu önermeleri inceleyelim:

p: Bugün yağmur yağıyordu; q: Bugün kar yağıyordu.

Bu önermelerden şu önermeleri oluşturacağız:

$\neg(p \vee q)$: Bugün yağmur veya kar yağmıyordu.

$\neg p \wedge \neg q$: Bugün yağmur yağmadı ve kar yağmadı.

Oluşturulan önermeler için doğruluk değerlerinin tablosunu oluşturacağız:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	T

Fark ettiğiniz gibi, $\neg(p \vee q)$ önermesinin her dört durumunda doğruluk değerleri $\neg p \wedge \neg q$ önermesinin doğruluk değerleri ile aynıdır. Bu ise demektir ki $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ bileşik önermesi p ve q önermelerinin her değeri için daima doğrudur.

Verilen bir önerme formülünün doğruluk değerlerini incelerken, formülde bulunan her önerme değişkeninin kaç doğruluk değeri olduğunu bilmemiz gerekir.

!

❖ Bir önerme formülünde n tane önerme değişkeni varsa, doğruluk değerler tablosunda her önerme değişkenine 2^n doğruluk değeri olmalıdır.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 2 $p \Rightarrow (p \vee q)$ önerme formülünün doğruluk değerlerini inceleyelim. Doğruluk değerler tablosuyla, işlemlerin sırasına göre hareket ederek tabloyu dolduruyoruz:

$\vee$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	$\perp$	T	T
$\perp$	T	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

$\Rightarrow$

- Fak ettiğiniz gibi, bu örnekte p ve q gibi iki önerme değişkeni vardır, bu nedenle her değişken için $2^2 = 4$ doğruluk değeri alınmıştır.

Örnek 2 deki önerme formülü, her önerme değişkenin her doğruluk değeri için doğru olduğunu görüyoruz.

Önerme formüllerini üç gruba ayırabiliriz:

> ❖ Önerme değişkenlerin her değeri için doğru olan önerme formüllerine **totolojiler** denir.
>
> ❖ Önerme değişkenlerin her değeri için yanlış olan önerme formüllerine **çelişkiler** denir.
>
> ❖ Önerme değişkenlerin bazı değeri için doğru, bazı değerleri için ise yanlış olan önerme formüllerine **tarafsız önerme formülleri** denir.

Örnek 3 $\tau(p)=\perp$; $\tau(q)=\mathrm{T}$; $\tau(r)=\perp$ için, verilen önerme formüllerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $p \Rightarrow \neg r \Leftrightarrow \neg(r \vee q) \Rightarrow p$; b) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \vee p)$,

a)

$$\begin{aligned}\tau\left(p \Rightarrow \neg r \Leftrightarrow \neg(r \vee q) \Rightarrow p\right) &= \perp \Rightarrow \neg\perp \Leftrightarrow \neg(\perp \vee \mathrm{T}) \Rightarrow \perp = \\ &= \perp \Rightarrow \mathrm{T} \Leftrightarrow \neg\mathrm{T} \Rightarrow \perp = \\ &= \mathrm{T} \Leftrightarrow \perp \Rightarrow \perp = \\ &= \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T} = \\ &= \mathrm{T}\end{aligned}$$

b) Kendiniz deneyiniz!

Örnek 4 Verilen p önermesi için şu formüllerin her birinin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $p \veebar \mathrm{T}$; b) $(\mathrm{T} \vee p) \Leftrightarrow \perp$; c) $p \wedge \mathrm{T}$; ç) $(p \Rightarrow \neg\perp) \Rightarrow \mathrm{T}$.

a) p önermesi doğru ya da yanlış olabilir, yani $\tau(p) = \mathrm{T}$ ya da $\tau(p) = \perp$ olabilir.

1) $\tau(p) = \mathrm{T}$ ise, $\tau(p \veebar \mathrm{T}) = \mathrm{T} \veebar \mathrm{T} = \perp$.

2) $\tau(p) = \perp$ ise $\tau(p \veebar \mathrm{T}) = \perp \veebar \mathrm{T} = \mathrm{T}$.

b) Benzer şekilde a) şıkkında olduğu gibi $\tau(p) = \mathrm{T}$ ya da $\tau(p) = \perp$ olabilir.

1) $\tau(p) = \mathrm{T}$ ise, $(\mathrm{T} \vee p) \Leftrightarrow \perp = (\mathrm{T} \vee \mathrm{T}) \Leftrightarrow \perp = \mathrm{T} \Leftrightarrow \perp = \perp$.

2) $\tau(p) = \perp$ ise $(\mathrm{T} \vee p) \Leftrightarrow \perp = (\mathrm{T} \vee \perp) \Leftrightarrow \perp = \mathrm{T} \Leftrightarrow \perp = \perp$.

c) ve ç) şıklarını kendiniz deneyiniz.

Örnek 5 Doğruluk değerler tablosu yardımıyla aşağıdaki önerme formülleri birer totoloji olduğunu gösteriniz.

a) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$;

b) $p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$.

a) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	T
T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T
T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	T	T	⊥	⊥	T	⊥	T
⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T

Demek ki, önerme formülü totolojidir.

b) Kendiniz deneyiniz!

Örnek 6 Verilen formüller birbiriyle mantıksal denk olduklarını ispatlayınız:

a) $q \vee \neg p$ ve $p \Rightarrow q$; b) $p \wedge (p \vee q)$ ve p.

a) Karşılıklı koşullu önerme (çift gerektirim) mantık işlemi yardımıyla yeni önerme formülü oluşturuyoruz. Bu şekilde yeni önerme formülü $q \vee \neg p \Leftrightarrow p \Rightarrow q$ elde edilir.

Elde edilen son önerme formülü totoloji ise, başlangıçta verilmiş olan önermeler de mantıksal denk olmaları gerekir.

p	q	$\neg p$	$q \vee \neg p$	$p \Rightarrow q$	$q \vee \neg p \Leftrightarrow p \Rightarrow q$
T	T	⊥	T	T	T
T	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	T	T

Buna göre, $q \vee \neg p$ ve $p \Rightarrow q$ önerme formülleri birbirine mantıksal denktirler.

b) Kendiniz deneyiniz!

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen önerme formüllerin $\tau(p)=\bot$; $\tau(q)=\top$; $\tau(r)=\bot$ için doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $\neg p\wedge r\Leftrightarrow\neg(r\wedge q)\Rightarrow p$; b) $(p\veebar\neg r)\Rightarrow\neg(q\Leftrightarrow p)$.

për

2. Verilen p önermesi için, verilen her formülün doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $p\vee\top$; b) $p\Rightarrow(\neg p\wedge\top)$; c) $p\Leftrightarrow\bot$; ç) $(\top\Rightarrow p)\veebar\neg\top$.

3. Verilen formüller mantıksal olarak denk olduklarını ispatlayınız:

a) $\neg(p\wedge q)$ ve $\neg p\vee\neg q$; b) $p\vee(p\wedge q)$ ve p.

4. Verilen önerme formüllerine ait doğruluk tablosu oluşturunuz:

a) $(p\vee r)\Rightarrow(p\wedge q)$; b) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$; c) $((p\Rightarrow q)\vee r)\Rightarrow(\neg p\vee\neg q)$.

5. Mantık Kanunları

Önceki ders biriminde önerme formüllerini tanımladık ve onların doğruluk değerleriyle ilgili nasıl olduklarını: totoloji, çelişki ya da belirsiz önerme formülü olup olmadıklarını inceledik.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Önerme formülü nedir?
- Totoloji nedir, çelişki nedir?
- Belirsiz önerme formülü nedir?

Önerme formülleri arasında, totolojilerin özel anlamı vardır.

❖ Her totolojiye **mantık kanunu** ya da **düşünme kanunu** denir.

❖ Önemli mantık kanunlardan bazıları:

1. Tümel evetlemenin değişme kanunu $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$;
2. Tikel evetlemenin değişme kanunu $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$;
3. Tümel evetlemenin birleşme kanunu $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$;
4. Tikel evetlemenin birleşme kanunu $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$;
5. Tümel evetlemenin tikel evetlemeye göre dağılma kanunu $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
6. Tikel evetlemenin tümel evetlemeye göre dağılma kanunu $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
7. Tikel evetlemenin tümel evetlemeye göre emme kanunu $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$;
8. Tümel evetlemenin tikel evetlemeye göre emme kanunu $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$;
9. Üçüncü ihtimalin yokluğu kanunu $p \vee \neg p$;
10. Aykırı olmama kanunu $\neg(p \wedge \neg p)$;
11. Çift değilleme kanunu $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$;
12. Koşullu önermeyi değiştirme kanunu $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$;
13. Karşılıklı koşullu önermeyi değiştirme kanunu $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$;
14. Karşılıklı koşullu önermeyi değiştirme kanunu $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$;
15. De Morgan kanunları:
   a) Tümel evetlemeyi değilleme kanunu $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$;
   b) Tikel evetlemeyi değilleme kanunu $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

Örnek 1 Doğruluk tablosunu uygulayarak 1, 2 ve 3 formülleri birer totoloji olduğunu ispatlayınız.

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ önerme formülü için şunu elde ediyoruz:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
T	T	T	T	T
T	⊥	⊥	⊥	T
⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	⊥	⊥	⊥	T

Buna göre, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ önerme formülü totoloji olduğunu görüyoruz.
Benzer şekilde, tikel evetlemesi için de dağılma özelliği geçerli olduğunu ve tümel evetlemesi için birleşme özelliği de geçerli olduğunu gösterebiliriz.

1 Doğruluk tablosunu uygulayarak 5, 6 ve 14 formülleri totoloji olduğunu ispatlayınız.

Örnek 2 $\neg(p \Rightarrow q)$ formülünü, gerektirim (ise) işareti olmamak üzere dönüştürelim.
Mantık kanunlarından yararlanarak

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$ elde edilir.

- Bu dönüşümde hangi mantık kanunları kullanılmıştır?

2 Mantık kanunlarından yararlanarak şu formülleri dönüştürünüz:
a) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$; b) $\neg(p \Leftrightarrow q)$.

Örnek 3 Mantık kanunlarından yararlanarak verilen önermenin değilini yapalım:
2 asal sayıdır ve 2 çift sayıdır.
Bu önermeyi simgelerle $p \wedge q$ biçiminde yazabiliriz, burada p: 2 asal sayıdır; q: 2 çift sayıdır.

De Morgan kanunlarından birini uygulamakla $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ elde edilir. Bunun sözlü olarak ifadesi:
2 asal sayı değildir veya 2 çift sayı değildir.

- Burada hangi De Morgan kanunu kullanılmıştır?

3 Verilen önermelerin değilini yazınız:
a) $2=5$ veya $2=5-3$; b) $3+5=8$ ve $3=8-5$; c) $3+7=10$ ise $7=10-3$.

Örnek 4 Şu koşullu önermeleri inceleyelim:
a) 3 + 7 = 10 ise 7 = 10 – 3 ; b) 3 + 7 = 10 ise 7 > 5 dir.
Her iki koşullu önerme doğrudur, halbuki onlar arasında fark vardır. a) şıkkındaki koşullu önermede 7 = 10 – 3 sonucu 3 + 7 = 10 hipotezinden gerekir. Bu koşullu önermede sonuç doğrudan doğruya hipotezden elde edilir ve bu sonuç hipotez doğru olduğu durumda daima doğrudur. Bu durumda **sonuç, mantıksal olarak hipotezden (varsayımdan) gerekir** deriz. Bu gibi her gerektirime **mantıksal sonuç** denir.
b) şıkkındaki koşullu önermede bu şekilde sonuca varamıyoruz.

!

- Sonucu mantıksal olarak hipotezden elde edilen doğru koşullu önermelere **mantıksal sonuç** denir.
- Her teorem $p \Rightarrow q$ koşullu önerme biçiminde yazılabilir, burada p teoremin hipotezi (varsayımı), q ise teoremin sonucudur.

4 Verilen koşullu önermelerden hangileri mantıksal sonuçtur:

a) 225 sayısı 9 ile bölünüyorsa, 225 sayısı 3 ile bölünür;

b) 9 – 5 = 4 ise, -1 < 0 dır.

Biri, belli sayıda bir önerme kümesinden belli bir önerme “mantıksal sonuç” olduğu sonucuna vardığı durumda buna tümdengelimli sonuç denir. Çıkış önermelerine **varsayımlar** veya **hipotezler** denir, bunlardan gereken önermelere ise **sonuç** denir.

Hipotez ve sonucu ifade eden önermeler, önerme harfleriyle ve mantık işlemleriyle ifade edildiği durumda ve bir sonucun elde edilmesi sadece hipotez ve sonucun özelliklerine bağlı olduğunda elde edilen sonuca **önermeli mantık yargısı** söz konusudur.

Önerme mantığında mantık sonuçların elde edilmesi için birçok mantık kanunlarından yararlanılır. Bunlardan birkaçını aşağıda gösterelim:

❖ **Yargıların elde edilmesi için kurallar:**

1. Modus ponens $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$;
2. Modus tolens $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$;
3. Hipotetik silogizmi $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
4. Olmayana ergi kuralı $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$.

Doğru sonuçların elde edilmesi için, yargı kuralların kullanılmasıyla ilgili birkaç pratik örnek çözeceğiz:

Örnek 4 Verilen önermelerden mantık yargısı oluşturunuz:

Dışarda yağmur yağar;

Dışarda yağmur yağarsa, şemsiye taşımalısın

Bu önermeleri önerme harfleriyle işaret edebiliriz ve onlara mantık işlemlerini kullanabiliriz.
Bu şekilde şunu yazabiliriz:

p: Dışarda yağmur yağıyor;

$p \Rightarrow q$: Dışarda yağmur yağarsa, şemsiye taşımalısın.

Demek ki, hipotez olarak p ve $p \Rightarrow q$ önermelerini kullanacağız

Modus ponens $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ yargı kuralını kullanarak, sonuç olarak q önermesini elde etmeliyiz.

O halde sonuç: Şemsiye taşımalısın olduğunu elde ediyoruz.

5 Verilen önermelerden mantık yargısı oluşturunuz:

Matematik testi için çok çalışacağım.

Matematik testi için çok çalışıyorsam başarı notum 5 olacaktır.

Mantık yargısını elde etmek için hangi kuraldan yararlandınız?

Örnek 5 Verilen önermelerden mantık yargısı oluşturalım:

Bugün bayram ise, okul kapalıdır;

Okul kapalı değildir.

Burada önermeleri önerme harfleriyle işaret edebiliriz ve mantık işlemlerinden yararlanabiliriz. Buna göre:

$p \Rightarrow q$: Bugün bayram ise, okul kapalıdır;

Burada, p: bayramdır, q: okul kapalıdır.

$\neg q$: okul kapalı değildir.

Demek ki, burada hipotez olarak: $p \Rightarrow q$ ve $\neg q$ önermeleri veriliyor.

Buradan, Modus tolens $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ yargı kuralını uygulamakla, sonuç olarak $\neg p$ önermesini elde edeceğiz.

Demek ki sonuç: bayram değildir.

6 Verilen önermelerden mantık yargısı elde edelim:
Hava sıcak ise, geziye çıkacağız.
Geziye çıkmayacağız.
Mantık yargılamayı türetmek için hangi kuraldan yararlandınız?

Örnek 6 Verilen önermelerden mantık yargısı türetelim:

Yüzmeye gidersem, güneş altında uzun kalacağım.
Güneş altında uzun kalırsam, yanacağım.
Mantıksal sonuç elde etmek için verilen önermeleri harflerle işaret ederek mantık işlemlerinden yararlanıyoruz. O halde:
$p \Rightarrow q$:Yüzmeye gidersem, güneş altında uzun kalacağım.
$q \Rightarrow r$: Güneş altında uzun kalırsam, yanacağım.
Hipotetik silogizmi kuralını uygulayarak sonuç:
$p \Rightarrow r$:Yüzmeye gidersem, yanacağım yargısı elde edilir.

Örnek 7 Verilen önermelerden mantık yargısı türetelim:

Odamı temizlersem, annem kızmayacaktır.

Temel önermeleri önerme değişkenleriyle işaret edersek, şunu yazabiliriz:

p – Odamı temizleyeceğim.

q – Annem kızacaktır.

O halde: Odamı temizlersem, annem kızmayacaktır önermesini $p \Rightarrow \neg q$ biçiminde yazacağız.

Olmayana ergi kuralından yararlanarak, ona denk önerme: $\neg(\neg q) \Rightarrow \neg p$ olacaktır, yani $q \Rightarrow \neg p$ elde edilir. Bunu sözlerle ifade edersek: Annem kızgınsa, odamı temizlemeyeceğim.

Verilen önermelerden mantık yargısı türetiniz:

7 Fizikten iyi not alırsam, sinemaya gideceğim.
Sinemaya gidersem, arkadaşlarımla dondurma yemeğe gideceğim.
Mantık yargısını türetmek için hangi kuralı kullandınız?

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Aşağıdaki önerme formülleri, mantık kanunları olup olmadıklarını yoklayınız:
   a) $p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$; b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$; c) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$;
   ç) $(p \Rightarrow q) \vee p \Rightarrow q$; d) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow p$; e) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.
   Mantık kanunu olduğunu nasıl anlayabilirsiniz?
2. Doğruluk değerler tablosunu kullanarak 8, 9 ve 15 formülleri totoloji olduğunu ispatlayınız.
3. Mantık kanunlarından yararlanarak şu formülleri dönüştürünüz:
   a) $\neg(\neg p \Leftrightarrow q)$; b) $\neg(\neg p \Rightarrow q)$.
4. Verilen önermelerin değilini yazınız:
   a) Demir metaldir ya da demir sıvı halinde değildir;
   b) $2+5 \neq 8$ ve $2=8-5$;
   c) 9 bileşik sayı ise, 9 sayısı 3 ile bölünür.
5. Mantık gerektirimi olan ve olmayan 3'er tane koşullu önerme ifade ediniz.
6. Şu önermelerden mantık yargısı türetiniz:
   İyi matematikçi olursam, programlamayı kolay öğreneceğim.
   Ben iyi matematikçiyim.
   Mantık yargısını türetmek için hangi kuralı kullandınız?
7. Şu önermelerden mantık yargısı türetiniz:
   Ürünlerin fiyatı artarsa, insanların satın alma gücü azalır.
   İnsanların satın alma gücü artar.
   Mantık yargısını türetmek için hangi kuralı kullandınız?
8. Şu önermelerden mantık yargısı türetiniz:
   Lotoda kazanırsam, yeni bilgisayar satın alacağım.
   Yeni bilgisayar alırsam, arkadaşlarımı yemeğe davet edeceğim.
   Mantık yargısını türetmek için hangi kuralı kullandınız?

6. Küme Kavramı, Altküme, Eşit ve Denk Kümeler

Küme kavramı matematikte temel kavramdır ve tanımlanamaz, ancak onu sezgisel olarak ne olduğunu kavrayabiliriz. Kümeyi, bir ortak özellikte belli bir kurala göre birleşen bir takım farklı nesneler topluluğu gibi tasarlayacağız.

Kümeler genellikle A, B, C, ve $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$,,,, gibi Latin alfabesinin büyük harfleriyle işaret edeceğiz, kümenin elemanlarını ise $a,\ b,\ c,\ \ldots$ gibi Latin alfabesinin küçük harfleriyle işaret edeceğiz.

Herhangi nesne verilen bir kümeye ait olup ya da ait olmadığını söyleyebilirsek, o küme tek olarak bellidir. Verilen bir elemanın bir kümeye ait olup ya da olmadığına ait şu işaretlemeyi kabul ediyoruz.

a elemanı A kümesine ait olduğunu göstermek için $a \in A$ simgesini kullanırız. b elemanı A kümesine ait olmadığını göstermek için $b \notin A$ simgesini kullanırız.

○ Verilen bir küme ne şekilde gösterilebilir?

1) Kümenin elemanlarının sayılmasıyla kümenin gösterimi. Bu durumda kümenin tüm elemanları büyük parantezler içinde yazılır ve yazılırken elemanların sırası önemli değildir.
2) Elemanların bir ortak özelliğini ifade ederek gösterim. Genel durumda herhangi bir elemanı x ile işaret eder ve ortak olan özelliği $P(x)$ ile işaret edildiği durumda verilen küme $\{x \mid P(x)\}$ biçiminde işaret edilir.
3) Kümenin Ven diyagramları yardımıyla gösterilişi. Bu yöntemle gösterim küme kapalı çizgilerle sınırlanmış düzlemin bir parçası biçiminde gösterilir.

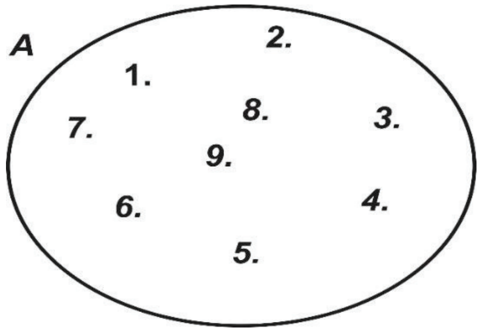
Kümelerin farklı şekillerde gösterimiyle ilgili şu örneği inceleyelim:

Örnek 1 10' dan küçük tüm doğal sayılardan oluşan A kümesini şu şekilde gösterebiliriz:

a) tablo halinde $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$,

b) ortak özellikle: $A=\{x \mid x\in\mathbb{N} \wedge x<10\}$ (A kümesi tüm x elemanları aittir, x doğal sayıdır ve x 10'dan küçüktür diye okunur).

c) Ven diyagramı:



Şu sonuca varılabilir:

❖ Bir küme birçok şekilde gösterilebilir: tablo halinde (elemanları sayarak), anlatma usulü ile ya da Ven diyagramıyla.

1 Verilen kümeleri tablo halinde ve Ven diyagramıyla gösteriniz: $A=\{x\in N\,|\,3\leq x<9\}$, $B=\{x\in N\,|\,x\leq 5\}$ ve $C=\{x\,|\,x$ ikinci yüzlüğün birinci onluğuna ait sayıdır$\}$.

Örnek 2 $A=\{2, 4, 6, 8\}$ kümesini ortak özellik usulü ile gösteriniz.

Verilen kümeyi ortak özellik usulü ile şu şekilde göstereceğiz:

$A=\{x\,|\,x$ 10'dan küçük çift sayıdır$\}$, fakat şu şekilde de gösterebiliriz:

$A=\{x\,|\,x$ 2468 sayısının rakamıdır$\}$. Fark edildiği gibi aynı küme birçok farklı şekilde gösterilebilir.

❖ Bir A kümesi diğer bir B kümesinin **alt kümesidir**, ancak ve ancak A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı ise. $A\subseteq B$ ile işaret edilir.

❖ A kümesinin tüm elemanları B kümesine ait, B kümesinde ise en az bir eleman A kümesine ait değilse, A kümesi B kümesinin **kesin anlamda altkümesidir** denir ve $A\subset B$ ile işaret edilir.

Örnek 3 $A=\{2, 3, 4\}$ kümesi $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin kesin anlamda altkümesidir, yani $A\subseteq B$ olmakla daha kesin $A\subset B$ dir. $C=\{2,3\}$ kümesi hem A hem de B kümelerinin alt kümesidir, yani $C\subseteq A$ ve $C\subseteq B$ dir. Daha da C kümesi A ve B kümelerinin kesin anlamda alt kümesidir.

Not: Her küme kendi kendinin alt kümesidir.

2 $M = \{n \mid n \in N$ ve $n \mid 12\}$ kümesinin tüm alt kümelerini yazınız.

Örnek 4 $N = \{x \mid x,$ 9 sayısını bölen çift sayıdır$\}$ kümesini tablo usulüne göre yazalım.

Böyle bir sayının olmadığını görebiliriz, yani 9 sayısını bölen çift sayı. Demek ki, N kümesinin elemanları yoktur. Bunu $N = \varnothing$ biçiminde yazıyoruz.

!

- Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir ve $\varnothing$ ile işaret edilir. Boş küme her kümenin alt kümesidir.
- A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı ise ve B kümesinin her elemanı A kümesinin de elemanı ise, A ve B kümeleri **eşittirler** denir. $A = B$ biçiminde işaret edilir, yani ($A = B$ ancak ve ancak $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$)
- Eleman sayısı eşit olan A ve B kümelerine **denktirler** denir. $A \cong B$ biçiminde işaret edilir.

Örnek 5

A = {Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, cumartesi, Pazar} ve $B = \{x \mid x$ haftanın günüdür$\}$ eşit kümelerdir, yani $A = B$ dir, aynı zamanda denk kümelerdir, yani $A \cong B$ dir.

Unutmayınız:

!

- A kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan kümeye, A kümesinin **parçalar kümesi** denir ve $P(A)$ ile işaret edilir.

Örnek 6 $A = \{x, y, z\}$ kümesinin parçalar kümesi

$P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$ kümesidir.

3 2263 sayısının rakamlarından oluşan kümenin parçalar kümesini yazınız.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen kümeleri tablo halinde (liste yöntemiyle) ve Ven diyagramıyla yazınız:

   a) $A=\{x \mid x$ TEKNİK sözünün harfidir$\}$

   b) $B=\{x \mid x\in \mathbb{N},\ x<7 \wedge x\neq 5\}$;

   c) $C=\{x \mid x\in \mathbb{N},\ x-$çift sayı$\wedge\ x<18\}$;

   ç) $D=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge 2x=30\}$.

2. $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesi verilmiş olsun. Aşağıdaki iddialardan hangileri doğrudur:

   a) $2\subset A$; b) $\{3\}\in A$; c) $\{4, 5, 6\}\in A$; ç) $\{3, 5, 8\}\subset A$.

3. Verilen kümelerden hangileri eşit, hangileri ise denktirler:

   a) $A=\{x \mid x-$ asal sayı $\mathrm{j} \wedge x<10\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$;

   b) $C=\{x \mid x\in\mathbb{N} \wedge 2\leq x<7\}$, $D=\{2, 3, 4, 5, 6\}$;

4. $A=\{x, 3, 5, 7\}$ ve $B=\{2, 5, y, 7\}$ kümeleri birbirine eşit olacak şekilde x ve y için değerler belirtiniz. Verilen iddialardan hangisi doğrudur:

   a) $x=y$; b) $x=5,\ y=2$; c) $x=2,\ y=7$; ç) $x=2,\ y=3$.

5. Verilen kümenin parçalar kümesini yazınız:

   a) $A=\{1, 2, 3\}$; b) $B=\{a, b, c, d\}$.

7. Mantık İşlemleri Yardımıyla Kümelerle İşlemlerin Tanımlanması

Değilleme ($\neg$), tümel evetleme ($\wedge$), tikel evetleme ($\vee$), ya-ya da tikel evetleme ($\underline{\vee}$), koşullu önerme ($\Rightarrow$), karşılıklı koşullu önerme ($\Leftrightarrow$) mantık işlemleridir, yani önermelerle işlemlerdir.

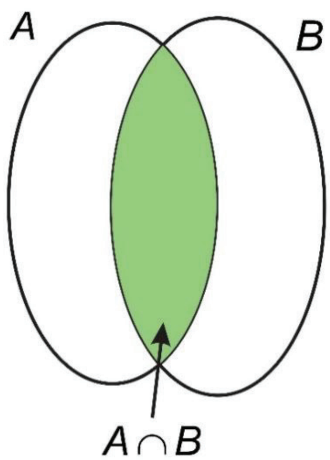
Önermelerde olduğu gibi, çok benzer şekilde kümelerde de işlemler tanımlanabilir. Pratikte çok sık, aynı zamanda iki ya da daha fazla kümeye ait olan elemanların incelenmesi, iki ya da daha fazla kümenin ortak elemanları, birine ait fakat diğerine ait olmayan ve benzer gibi problemlere rastlanmaktadır.

Kümelerin Kesişimi

!

- A ve B herhangi iki küme olsun. A ve B kümelerindeki ortak elemanlarından oluşan küme A ve B kümelerinin **kesişimidir** ve $A \cap B$ biçiminde yazılır.
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
- A ve B kümelerinin kesişimi boş küme, yani $A \cap B = \emptyset$ ise, A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.

$A \cap B$ kümesini Ven diyagramıyla şu şekilde gösterebiliriz:



Şu örnekleri inceleyelim:

Örnek 1

$A = \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49\}$ ve $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 25\}$ kümelerin kesişimi $A \cap B = \{4,\ 9,\ 16,\ 25\}$ kümesidir.

Örnek 2

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ ve $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x > 5\}$ kümeleri ayrık kümelerdir, çünkü $A \cap B = \emptyset$.

1 $A = \{0,1,2,9,10,12,15\}$ ve $B = \{5,6,7,8,9,10\}$ kümelerin kesişimini yazınız.

➢ Tümel evetlemenin doğruluk tablosunu ve kesişime ait elemanların tablosunu inceleyelim:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥

A	B	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

- Nasıl sonuca varabilirsiniz?

- Yukarıda gösterilenlere göre, A ve B kümelerinin kesişimi $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ kümesidir.

2 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $B = \{i, c, d, k\}$. kümeleri verilmiş olsun. $A \cap B$ kesişimini yazınız.

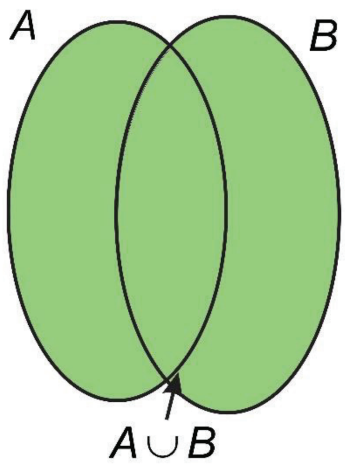
Kümelerin birleşimi

!

- A ve B kümelerindeki tüm elemanların oluşturduğu küme $A \cup B$ biçiminde gösterilir. Bu kümeye A ve B **kümelerinin birleşimi** denir.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$A \cup B$ kümesini Ven diyagramıyla şu şekilde gösterebiliriz:



Örnek 3 $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ve $B=\{x \mid x\in\mathbb{N} \wedge x<9\}$ kümelerinin birleşimi $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$ dir.

- Tikel evetlemenin doğruluk tablosunu ve birleşime ait elemanların tablosunu inceleyelim:

p	q	$p\vee q$	A	B	$A\cup B$
T	T	T	$\in$	$\in$	$\in$
T	$\perp$	T	$\in$	$\notin$	$\in$
$\perp$	T	T	$\notin$	$\in$	$\in$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

- Nasıl sonuca varabilirsiniz?

3 $A=\{*, \Delta, 0, 1, \square\}$ ve $B=\{\mathrm{T}, \perp, *, \Delta\}$ kümeleri verilmiş olsun. $A\cup B$ birleşimini yazınız.

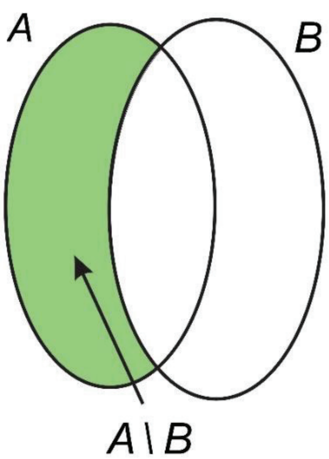
Kümelerin Farkı

!

- A ve B herhangi iki küme olsun. A da olup da B de olmayan elemanların kümesi $A\setminus B$ biçiminde yazılır ve bu kümeye A ve B kümelerinin **farkı** denilir.

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

$A\setminus B$ kümesinin Ven diyagramıyla gösterimi:



Örnek 4 $A=\{x \mid x\in\mathbb{N} \wedge 1\le x\le 8\}$ ve $B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$ kümeleri verilmiş olsun. $A\setminus B$ ve $B\setminus A$ kümelerini belirtelim. $A\setminus B=\{4, 6, 8\}$ ve $B\setminus A=\{9, 10, 11\}$.

4 $A=\{0,1,2,9,10,12,15\}$ ve $B=\{7,8,9,10,11,12\}$ kümelerinin farkını belirtiniz.

5 $A=\{0,1,2,9,10\}$ ve $B=\{7,8,9,10\}$ kümelerinin farkını belirtiniz.

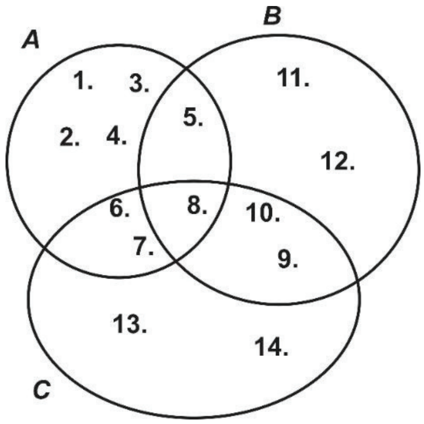
- Önerme formüllerinin doğruluk tablosunu ve iki kümenin farkına ait elemanların tablosunu inceleyelim:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg p\wedge q$	A	B	$A\setminus B$	$B\setminus A$
T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
T	⊥	⊥	T	T	⊥	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
⊥	T	T	⊥	⊥	T	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

- Nasıl sonuca varabilirsiniz?

- Yukarıda ifade edilenlerden A kümesi ve B kümesinin farkı $A\setminus B$ = { x | $x\in$A ve $x\notin$B} ile tanımlanmış kümedir.

6 Verilen diyagramdan $A\setminus B$, $B\setminus A$ ve $A\setminus(B\cup C)$ kümelerini belirtiniz.



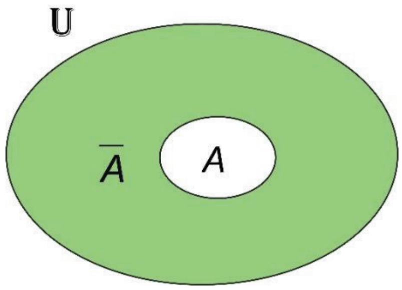
Kümenin Tümleyeni

!

❖ A kümesinin ($A \subset \mathbb{U}$) kümesinde tümleyeni, **U** kümesine ait olan ve A kümesine ait olmayan tüm elemanların kümesidir ve $\overline{A_U}$ ile işaret edilir.

$\mathbb{U}$ kümesine evrensel küme denir.

$\overline{A_U}$ kümesini Ven diyagramıyla gösterelim:



Örnek 5

$A = \{2, 4, 7, 9\}$ kümesinin $U = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ kümesine göre tümleyeni $\overline{A_U} = \{1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$ dir.

➢ Değillemeye ait doğruluk tablosunu ve bir kümenin tümleyenine ait elemanların tablosunu inceleyelim:

p	$\neg p$
T	⊥
⊥	T

A	$\overline{A}_U$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

○ Nasıl sonuca varabilirsiniz?

➢ Yukarıdaki incelemelerden şu sonuca varabiliriz: A kümesinin bir $\mathbb{U}$ kümesinde tümleyeni $\overline{A_U} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$ biçiminde tanımlanan bir kümedir.

7

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $U = \{1, 2, \ldots, 100\}$ ve $B = \{10, 20, 30, \ldots, 100\}$ kümeleri verilmiş olsun. $\overline{A_U}$, $\overline{A_B}$ ve $\overline{B_U}$ kümelerini yazınız.

Kümelerin Kartezyen (Dekard) Çarpımı

!

❖ A ve B iki küme olsun. Birinci bileşeni (elemanı) A dan ikinci bileşeni B den alınarak oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine A ile B nin kartezyen (Dekard) çarpımı denir ve A x B biçiminde yazılır.

Buna göre: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

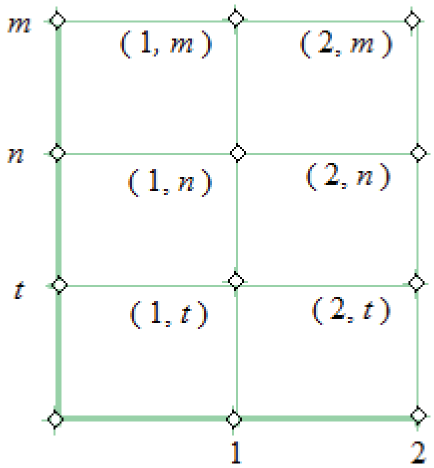
Benzer şekilde, $A^2 = A \times A$ biçiminde işaretlenen dekard karesi, boş olmayan A kümesinin kendi kendisiyle bir kartezyen çarpımıdır, yani

$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$

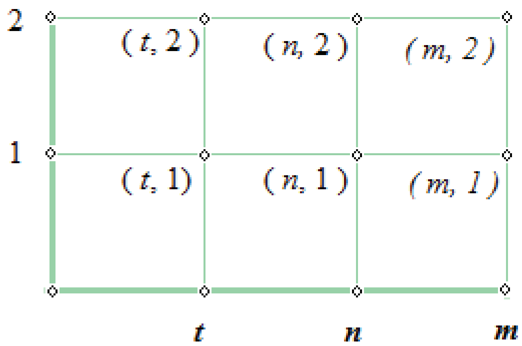
Örnek 6 $A=\{1, 2\}$ ve $B=\{t, n, m\}$ kümelerin $A \times B$ ve $B \times A$ kartezyen çarpımlarını yazalım:

$A\times B=\{(1,t),(1,n),(1,m),(2,t),(2,n),(2,m)\}$ ve $B\times A=\{(t,1),(t,2),(n,1),(n,2),(m,1),(m,2)\}$

Bunların koordinat şemasında gösterilişi:



$A\times B$



$B\times A$

7 $A=\{2,4,6\}$ ve $B=\{2,3\}$ kümelerin $A \times B$ kartezyen çarpımını yazınız.

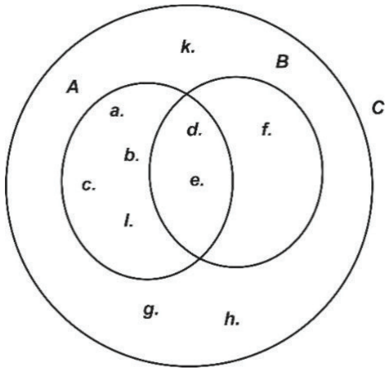
8 $A=\{x \mid x \mid 10\}$ kümesine ait $A^2 = A \times A$ dekart karesini hesaplayınız.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \wedge -3<x<2\}$, $B=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ve $C=\{x \mid x\in\mathbb{N} \wedge x^2<16\}$ kümeleri verilmiş olsun. Şu kümeleri belirtiniz: bashkësitë:

   a) $A\cup B$; b) $A\cap B$; c) $(A\setminus B)\cup C$; ç) $A\cap(B\setminus C)$.

2. Verilen Ven diyagramından A, B, C ve $A \cap B$kümelerini belirtiniz.



3. $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$ve $C=\{1, 5, 7\}$kümeleri verilmiştir. $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$ eşitliğinin doğruluğunu ispatlayınız.

4. $A=\{a, 2, 3\}$, $B=\{1, b\}$, veriliyor. Şu kartezyen çarpımları belirtiniz:

a) $A \times B$ b) $B \times A$

5. $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -4 \leq x < 0\}$ ve $B=\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^2-9=0\}$ kümeleri verilmiştir.

Şu kümeleri belirtiniz:

a) $A \cap B$ b) $A \setminus B$ c) $P(A \setminus B)$ ç) $B \setminus A$.

6. Verilen küme çiftlerinden hangileri ayrık olduğunu belirtiniz:

a) $A=\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 7\}$, $B=\{x \mid, x \in \mathbb{Z} \wedge -2 < x < 5\}$;

b) $C=\{x \mid x -$ çift sayı $\wedge\ x < 12\}$, $D=\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x-5=0\}$.

7. Evrensel küme $U=\{*, \Delta, 2, -5, \pi, a\}$ ve $A=\{a, 2, \pi\}$, $B=\{-5, \Delta, *, \pi\}$ ve $C=\{*, -5\}$ altkümeleri verilmiştir. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $\overline{A}$ b) $\overline{C}$ c) $\overline{C} \cup \overline{B}$ ç) $\overline{(A \setminus B)}$.

8. x ve y değişkenlerinin hangi değerleri için eşitlikler doğrudur:

a) $(x, 5)=(3, y)$ b) $(2, y)=\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$.

9. Aşağıda verilmiş olan kartezyen çarpımının elde edildiği A ve B kümelerini belirtiniz:

$A \times B=\{(1,\square), (1,a), (b,\square), (b,a), (\pi,\square), (\pi,a)\}$.

10. Verilen kümelere eşit olan kümeleri yazınız:

a) $\varnothing \setminus A$ b) $A \cup (A \cap B)$.

8. Kümelerle İşlemlere Ait Kanunlar

Bu başlığın birinci bölümünde birkaç mantık kanunuyla ya da diğer bir deyişle düşünme kanunları üzerinde incelemelerde bulunduk; bunlar: tümel ve tikel evetlemenin değişme kanunu, tümel ve tikel evetlemenin birleşme kanunu vb.

Yapılan incelemelerde, kümelerle işlemlerin mantık işlemleriyle doğrudan doğruya ilişkide olduğunu gördük.

Matematik mantığında olduğu gibi, kümeler teorisinde de kümelerin işlemleriyle ilgili kanunlar vardır.

Kümeler teorisinde de aynı mantık kanunların uygulanması söz konusudur. Bunlar:

Önerme $\rightarrow$ küme

Önermede tümel evetleme $\rightarrow$ kümelerin kesişimi

Önermede tikel evetleme $\rightarrow$ kümelerin birleşimi

önermenin değili $\rightarrow$ kümenin tümleyeni

Kümelerle işlemlere ait bazı kanunlar:

1. Kesişimin değişme kanunu $A \cap B = B \cap A$
2. Birleşimin değişme kanunu $A \cup B = B \cup A$
3. Kesişimin birleşme kanunu $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. Birleşimin birleşme kanunu $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5. Kesişimin birleşime göre dağılma kanunu $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. Birleşimin kesişime göre dağılma kanunu $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. İki kat değilleme kanunu $(A^C)^C = A$
8. $A \cup A^C = U$
9. $A \cap A^C = \varnothing$
10. $A \cup \varnothing = A$
11. $A \cap U = A$
12. De Morgan kanunları:
    a) Kesişimin tümleyeni kanunu $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

    b) Birleşimin tümleme kanunu $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
13. Kartezyen çarpımının kesişime göre dağılma özelliği

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

14. Kartezyen çarpımının birleşime göre dağılma özelliği
$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;
15. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$;
16. $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$.

Örnek 1 $A\cap B=B\cap A$ kesişimin değişme kanununu ispatlayalım.

I – yöntem:

Tümel evetlemenin değişme özelliğine ait önerme formüllerini ve mantık kanunlarını uygulamakla şunu elde edeceğiz:

x şunu elde edeceğiz:

$$
\begin{aligned}
x\in A\cap B &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x\in B \wedge x\in A \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x\in B\cap A.
\end{aligned}
$$

Demek k, $A\cap B=B\cap A$ gerekir.

II – yöntem:

Elemanların kümeye ait olma tablosundan yararlanarak şunu elde ediyoruz:

A	B	$A\cap B$	$B\cap A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Tablodan görüldüğü gibi, tablonun son iki sütunu aynıdır, yani kümeler aynıdır. Buna göre kesişimin değişme kanunu $A\cap B=B\cap A$ doğrudur.

Örnek 2 Kartezyen çarpımın birleşme işlemine göre $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ dağılma kanununu ispatlayalım.

Şu şekilde hareket ediyoruz:

$$
\begin{aligned}
&(x,y)\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C \Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B\vee y\in C)\Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times C\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C).
\end{aligned}
$$

1 Özellik 5’ i ispatla.

Kendi başına çalışma için alıştırmalar

1. 4, 6, 12 a) ve 16 özellikleri ispatlansın.
2. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ eşitliği doğru mudur?

9. Önerme Fonksiyonları, Çözümler Kümesi

Şimdiye dek, önerme formülleri, totolojiler ve mantık kanunları hakkında bilgiler edindik.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Önerme formülü nedir?
- Hangi önerme formülüne totoloji denir?
- Totolojileri başka şekilde nasıl ifade ediyoruz?

Örnek 1

“2 + x = 10” tümcesi önerme değildir, halbuki “x = 5 için, 2 + x = 10” tümcesi yanlış önermedir. “ x = 8 için, 2 + x = 10” tümcesi doğru önermedir.

Birinci tümce “2 + x = 10” değişkenli tümcedir ve değişkenin her reel sayılı değeri için önermeye dönüşür. Bu gibi tümcelerin matematik mantığında özel değeri vardır ve bunlara **önerme formülleri** denir. Önerme fonksiyonları fonksiyon olduklarına göre, onların tanımlı oldukları tanım kümesi vardır. Örnekteki “2 + x = 10” tümcesinde “x = 5 için” ifadesi katılırsa, tümce yanlış önermeye dönüşür; “x = 8 için” katılırsa doğru önermeye dönüşür. Demek ki, bir önerme fonksiyonu tanım bölgesinden bazı değerler için **doğru**, bazı değerler için ise **yanlış önermeye** dönüşür.

Şu sonuca varabiliriz:

❖ Değişkenli bir tümce, verilen bir M kümesinden aldığı her değeri için önermeye dönüşüyorsa, o halde ona M kümesi üzerinde **önerme fonksiyonu** ya da **açık önerme** denilir.

❖ M kümesine önerme fonksiyonun tanım kümesi denilir, bu kümenin elemanlarına ise **değişkenin mümkün değerleri** denir.

❖ Önerme fonksiyonunu doğru önermeye dönüştüren değişkenin tüm değerlerini içeren $M_1 \subseteq M$ kümesi **önerme fonksiyonun çözümler kümesidir**. M_1 kümesinin her elemanına **önerme fonksiyonun çözümü** denir.

Örnek 2

$x^2 = 4$ tümcesi önerme fonksiyonudur. $M = \mathbb{Z}$ kümesi üzerinde önerme fonksiyonun çözümü $M_1 = \{-2, 2\}$ dir.

1 Verilen tümcelerden hangileri önerme fonksiyonudur:

a) $x+2=6, x\in\mathbb{N}$ b) $x+2<6, x\in\mathbb{Z}$ c) $x+2=y, x=5$.

2 $5 \mid x$ önerme fonksiyonun çözümler kümesini, $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ tanım kümesi üzerinde belirtiniz.

Örnek 3

$P(x): x^2=4$ önerme fonksiyonu, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinde tanımlıdır. $P(2)$ önermesinin doğruluk değeri $\tau(P(2))=T$, $\neg P(-3)$ 'ün ise, $\tau(\neg P(-3))=T$ olduğunu elde ediyoruz. Şimdi kendi başına $\tau(P(3))$, $\tau(P(-2))$, $\tau(\neg P(1))$ değerlerini belirtmeyi deneyiniz.

3 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde tanımlı $P(x): x<11$ ve $Q(x): 3\mid x$ önerme fonksiyonları verilmiş olsun. Şu önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $\neg P(2)\vee Q(8)\Rightarrow P(2)$; b) $\neg(P(9)\wedge\neg Q(3))$; c) $\neg Q(10)\Leftrightarrow P(7)$.

❖ Her" (ya da "herhangi") ya da "bazı" (ya da "en az bir") sözcüklerini kullanmakla önerme fonksiyonu doğru ya da yanlış önermeye dönüşür.

❖ "Her" sözcüğü matematikte $\forall$ simgesiyle işaret edilir ve ona **evrensel niceleyici** denir.

❖ "Bazı" sözcüğü matematikte $\exists$ simgesiyle işaret edilir ve ona **varlıksal niceleyici** denir.

Örnek 4

"Bazı doğal sayı x için x^2 = 16" önermesini simgelerle $(\exists x \in \mathbb{Z})\ x^2 = 16$ biçiminde yazılır. Bu önerme doğrudur, çünkü $x = 4$ ve $x = -4$ tam sayıları için önerme doğrudur, yani $4^2 = 16$ ve $(-4)^2 = 16$ dır.

4 Verilen önermeleri simgelerle yazınız:

a) Her n doğal sayısı için, $n+1 > n$ dir;
b) Bazı rasyonel sayı y için, $y^2 = 8$ dir;
Ondan sonra, onların doğruluk değerlerini belirtiniz.

5 Simgelerle verilmiş olan önermeleri sözlü ifade ederek yazınız.

a) $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 = x \cdot x$;
b) $(\forall x \in \mathbb{Q})\ 3x = x + x + x$.
Ondan sonra onların doğruluk değerini yazınız.

➢ Niceleyici olarak $\exists!$ simgesi de kullanıldığını hatırlatalım. Bu simge "tek olarak vardır" sözleri yerine yazılır.

Örnek 5

$(\exists! x \in \mathbb{Z})\ x^2 = 16$ önermesi " x^2 = 16 olacak şekilde tek olarak belli bir tam sayı x vardır" ifadesini işaret etmektedir. Bu demektir ki, x^2 = 16 eşitliğini sağlayan sadece bir tam sayı vardır. Bu önerme örnek 4'te $(\exists x \in \mathbb{Z})\ x^2 = 16$, yani "Bazı doğal sayı x için x^2 = 16" önermesinden farklıdır, çünkü burada sadece bir tam sayı kısıtlaması yoktur, yani iki tane de olabilir. Daha da örnek 4'te önerme doğrudur, $(\exists! x \in \mathbb{Z})\ x^2 = 16$ önermesi ise yanlış önermedir.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen tümcelerden hangileri önerme fonksiyonudur:
   a) $x + 2 > 6, x \in \mathbb{Z}$; b) $x - 2 < 6, \forall x \in \mathbb{Z}$; c) $2x = y, x = 5, y = -1$.
2. M = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15} kümesi üzerinde tanımlı "x çift sayıdır" önerme fonksiyonunun çözümler kümesini belirtiniz.
3. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde tanımlı $P(x, y): x + y \leq 12$ ve $Q(x, y): x - y = 3$ önerme fonksiyonları verilmiş olsun. Şu önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:
4. Verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:
   a) $\neg P(2,1) \vee Q(8,5) \Rightarrow P(2,2)$; b) $\neg(P(9,1) \wedge \neg Q(2,3))$; c) $\neg Q(1,10) \Leftrightarrow P(3,7)$.

   a) $(\exists x \in \mathbb{Q})\ 2x = x \cdot x$; b) $(\forall x \in \mathbb{N})\ 3x = x^3$; c) $(\exists! x \in \mathbb{Z})\ x - 1 = -5$.

5. Önerme fonksiyonlardan üç örnek sayınız. Onların her birinin çözümler kümesini belirtiniz.

6. $\exists!$, $\exists$ ve $\forall$ niceleyicilerini kullanarak önerme olan üç örnek sayınız. Onların her birinin doğruluk değerini belirtiniz.

10. Modüler Birime Ait Tekrarlama Alıştırmaları

1. Verilen tümcelerden hangileri önerme olduğunu belirtiniz:

a) Dışarı çıkınız! b) $2>3$; c) Armut en lezzetli meyvedir.

2. Aşağıdaki tabloda verilen önermenin doğruluk değerini (T ve $\perp$ simgelerini kullanarak) belirtiniz.

x	-2	-1	0	1	2
$\tau(-2x+5=3)$					

3. $p: 2\cdot 2\neq 5$, $q: \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ ve $r: 3<-2$ önermeleri veriliyor. Şu önermeleri oluşturunuz:
a) $\neg p\wedge q$; b) $p\Rightarrow q$; c) $q\Leftrightarrow \neg r$.

4. Verilen önerme formülünün doğruluk değerlerini belirtiniz:
$\neg p\Leftrightarrow (r\wedge q)\Rightarrow (p\vee \neg r)$ ve $\tau(p)=\perp$, $\tau(q)=\mathrm{T}$ için $\tau(r)=\mathrm{T}$.

5. Doğruluk değerler tablosunu kullanarak, $p\Leftrightarrow q\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$ formülü bir totoloji olduğunu ispatlayınız.

6. $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z},\ -2<x\leq 3\}$ ve $C=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x^2\leq 9\}$ kümeleri veriliyor. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $(A\setminus C)\cap B$; b) $P(A\setminus B)$; c) $(A\cap B)\setminus(A\cup B)$.

7. Verilen kartezyen çarpımından A kümesini belirtiniz:
$(B\cup C)\times A=\{(*,3),\ (2,1),\ (\Delta,5),\ (*,1),\ (2,3),\ (\Delta,3),\ (*,5),\ (2,5),\ (\Delta,1)\}$.

8. $U=\{-2,\ 0,\ 3,\ \theta,\ b,\ \Delta\}$ evrensel kümesi ve $A=\{-2,\ \theta,\ b\}$ ve $B=\{0,\ \Delta,\ b,\ 3\}$ alt kümeleri veriliyor. $\overline{(B\setminus A)}$ kümesini belirtiniz.

9. $A\subseteq B$ ve $B\subseteq C$ ise, $(A\cap B)\cup C$ kümesini belirtiniz.

10. Birleşimin tümleyenine ait kanun ispatlansın.

2

REEL SAYILAR

MODÜLER BİRİMİN HEDEFLERİ

Bu modüler birimini incelemekle öğrenci şu kazanımları elde etmelidir:

- Doğal sayılarla işlemlerden yararlanmayı;
- Asal ve bileşik sayıyı tanımlar, doğal sayıyı asal çarpanlara ayırmayı ve doğal sayıların EKOK ve EBOB nini belirtmeyi;
- Tam sayılar kümesinde işlemlerden yararlanmayı;
- Mutlak değer tanımını tanımlamayı ve mutlak değerli alıştırmaları çözmeyi;
- Rasyonel sayıların tanımlamayı ve rasyonel sayıları karşılaştırmayı;
- Kesirleri genişletmeyi ve kısaltmayı;
- Kesirlerle işlemleri yapmayı;
- Ondalık sayıyı kesir biçiminde ve tersine dönüştürmeyi;
- İrasyonel sayıyı tanımlamayı ve reel sayının mutlak değerini belirtmeyi;
- Reel sayıyı sayı doğrusu üzerinde göstermeyi;
- Aralıkları geometrik şekilde ve parantezli olarak göstermeyi;
- Kökleri normal şekilde dönüştürmeyi;
- Pratik alıştırmaları çözmeyi.

MODÜLER BİRİM 2' NİN İÇİNDEKİLERİ

1. Doğal Sayılar Kümesi, İşlemler ve İşlemlerin Özellikleri

Doğal sayılar insanın sayma gereksiniminden ortaya çıkmıştır. Onlarla, sonlu bir kümenin elemanlarını saymanın sonuçlarını gösteriyoruz.

Doğal sayılarla ilgili şunların doğru olduğunu biliyoruz:

- Doğal sayıları 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve 0 rakamlarıyla yazıyoruz;
- Beş yüz yirmi yedi doğal sayının rakamlarla yazılışı 527 biçimindedir;
- Yüz yedi doğal sayısının rakamlarla yazılışı 107 biçimindedir;
- Yedi yüz yirmi doğal sayısının rakamlarla yazılışı 720 biçimindedir;

○ İki yüz yetmiş beş, bin elli bir, iki bin yedi yüz sekiz doğal sayılarını rakamlarla yazınız!

- Doğal sayılar: 1, 2, 3, 4, 5, …… dir;
- Doğal sayıları $\mathbb{N}$ harfiyle işaret ediyoruz, yani $\mathbb{N}\ \{1,2,3,,...,n,\ n+1,...\}$ şeklinde kümedir.

1.1. Doğal Sayıları Tanımlama

Doğal sayılar dizisinde şu bağıntıları görebiliriz:

- En küçük doğal sayı 1 dir;
- doğal sayı 7 nin bir sonrası 8 dir, 523 doğal sayısının ise 524 doğal sayısıdır;

Düşününüz ve cevaplayınız!

○ Hangi doğal sayı 78 doğal sayısının bir sonrasıdır, 1230 doğal sayısının ise bir sonrası hangisidir?

○ Her doğal sayının bir sonrası var mıdır?

○ Doğal sayılar kümesi sonlu mudur?

- 25 sayısının bir öncesi 24 doğal sayısıdır, 2054 sayısının bir öncesi 2053 doğal sayısıdır;

Düşününüz ve cevaplayınız!

○ Hangi doğal sayı 125 doğal sayısının bir öncesidir, 2050 doğal sayısının ise bir öncesi hangisidir?

○ Hangi doğal sayı 1 doğal sayısının bir öncesidir? Her doğal sayının bir öncesi var mıdır?

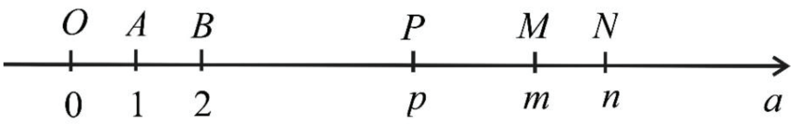
○ “0 doğal sayıdır” önermesi doğru mudur?

- 0 sayısı doğal sayı değildir, yani $0 \notin \mathbb{N}$;

- Doğal sayılar kümesine 0 sayısını ilave edersek **genişletilmiş doğal sayılar kümesini** elde ediyoruz ve bunu $\mathbb{N}_0$ ile işaret ediyoruz. O halde bu kümeyi şu şekilde işaret ediyoruz:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n+1, ...\} \,.$$

Doğal sayıları (şekilde olduğu gibi) bir a sayı doğrusu üzerinde gösterebiliriz. Bu doğru, bir yönlü doğrudur ve üzerinde bir başlangıç noktası O ve uzunluğu 1 olacak şekilde bir $\overline{OA}$ birim doğru parçası seçilmiştir. Buna göre her doğal sayıya, a sayı doğrusu üzerinde birer noktayı eşleştirebiliriz.



a sayı doğrusu üzerinde görüldüğü gibi O noktasına 0 sayısı eşleşmiştir, A noktasına 1 doğal sayısı, B noktasına 2 doğal sayısı eşleşmiştir, N noktasına n doğal sayısı eşleşmiştir vb. Demek ki, her doğal sayıya a sayı doğrusu üzerinde birer nokta eşleşebilir.

- P ve M noktalarına hangi doğal sayılar eşleşmiştir?

a sayı doğrusuna bakarsak, göreceğiz ki: doğal sayı 1, doğal sayı 2 nin solundadır, yani $1 < 2$ (oku: 1 küçüktür 2, ya da 1 ikiden küçüktür). Halbuki 2 doğal sayısı 1 doğal sayısının sağında bulunur, yani $2 > 1$ dir (oku: 2 birden büyüktür). 0 sayısı tüm doğal sayıların solunda bulunur, bu nedenle 0 sayısı tüm doğal sayılardan küçüktür.

Şu önermeler doğrudur:

- $1 \leq 2$ (oku: 1 küçüktür ya da eşit 2);
- $2 \geq 1$ (oku: 2 büyüktür ya da eşit 1);
- $2 \leq 2$ (oku: 2 küçüktür ya da eşit 2);
- $2 \leq 2$ (oku: 2 küçüktür ya da eşit 2);
- Halbuki, $2 < 2$ doğru değildir. $2 > 2$ ifadesi de doğru değildir.

a sayı eksenine göre m doğal sayısı n doğal sayısının solunda yer alırsa $m<n$ yazıyoruz. $m \leq n$ yazdığımızda $m < n \vee m = n$ demek isteriz.

1 Verilen önermelerden hangileri doğrudur:

a) $25 > 12$; b) $25 \geq 75$; c) $15 < 12 \wedge 15 > 3$; ç) $5 \leq 2 \vee 5 > 3$.

Şunu bilmelisiniz:

!

- Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}=\{1,2,3,...,n,n+1,...\}$ dir, genişletilmiş doğal sayılar kümesi ise $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,4,...,n,n+1,...\}$ dir.
- Doğal sayılar kümesinde, her doğal sayının bir sonrası vardır.
- Doğal sayılar kümesinde en büyük doğal sayı yoktur.
- Doğal sayılar kümesi sonlu küme değil, sonsuz kümedir.
- m doğal sayısı, a sayı doğrusu üzerinde n doğal sayısının solunda olduğu durumda biçiminde yazılır.
- $m \leq n$ ifadesi $m < n \vee m = n$ demektir.
- Doğal sayıları sıralayabiliriz, yani $1 < 2 < 3 < ......< n < .....$
- $\mathbf{0}$ sayısı doğal sayı değildir ve her doğal sayıdan küçüktür.

1.2. Doğal sayılar kümesinde işlemler ve işlemlerin özellikleri

Doğal sayılar kümesinde şu işlemleri tanımlayacağız: toplama, çıkarma, çarpma ve bölme.

Toplama: Doğal sayılardan oluşan (m, n) sıralı çiftine, onların toplamı olan bir doğal sayı karşılık gelir, yani $(m,n) \xrightarrow{+} k = m+n$ yani her (m, n) doğal sayıların sıralı çiftine onların toplamını ifade eden tek bir doğal sayı k vardır. m ve n doğal sayılarına toplananlar denir.

2 Hesaplayınız: a) 256 + 782; b) (257 + 129) + 526; c) 456 + (125 + 128).

İki doğal sayının toplamı yine doğal sayı, yani $m,n \in \mathbb{N}, m+n \in \mathbb{N}$ olduğu biliniyor. Buna göre, toplama işlemi doğal sayılar kümesinde iç işlemdir, yani doğal sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalı işlemdir.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Şu eşitlikler doğru mudur:

a) $122+523=523+122$ b) $(255+464)+789=255+(464+789)$?

Doğal sayılarda herhangi $m, n, k \in \mathbb{N}$ doğal sayılar için toplama işleminde şu özellikler geçerlidir:

- ❖ Doğal sayıların toplama işlemine göre değişme özelliği $m + n = n + m$
- ❖ Doğal sayıların toplama işlemine göre birleşme özelliği $(m + n) + k = m + (n + k)$.
- ○ Doğal sayıların toplama işlemine göre değişme ve birleşme özelliğini sözlerle nasıl ifade edeceksiniz?

- ○ Doğal sayıların toplama işlemi $\mathbb{N}_0$ genişletilmiş doğal sayılar kümesinde aynı şekilde tanımlanır mı? Toplama işleminin değime ve birleşme özelliği $\mathbb{N}_0$ kümesinde doğru mudur?

Şu özellik de doğrudur:

- ❖ Her doğal sayı $m \in \mathbb{N}_0$ için $m + 0 = m = 0 + m$.

Çarpma: Doğal sayılarda verilen bir (m, n) sıralı çiftine, onların çarpımı olan bir k doğal sayısı karşılık gelir, yani $(m,n) \xrightarrow{\cdot} k = m \cdot n$, yani doğal sayılarda her (m, n) sıralı çiftine, onların çarpımı olacak bir tek k doğal sayısı eşleşir. m ve n doğal sayılarına çarpanlar denir.

Düşününüz ve cevaplayınız!
- ○ $2 + 2 + 2$ toplamını kısa olarak nasıl yazabiliriz?
- ○ $5 + 5 + 5 + 5$ ve $6 + 6$ toplamını da kısa olarak nasıl yazacaksınız?

3 Hesaplayınız: a) 25 · 82; b) (57 · 29) · 5; c) 16 · (5 · 28).

Herhangi iki doğal sayının çarpımı yine doğal sayı olduğunu biliyoruz, yani $m, n \in \mathbb{N}, m \cdot n \in \mathbb{N}$ dir. Buna göre, çarpma işlemi doğal sayılar kümesinde iç işlemdir, yani doğal sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

Düşününüz ve cevaplayınız!
- ○ Şu eşitlikler doğru mudur: a) 2·3=3·2; b) (5·4)·8=5·(4·8)?

Herhangi iki doğal sayı $m,\ n\ ,\ k\ \in\ \mathbb{N}$ için, doğal sayılarda çarpma işlemine ait şu özellikler geçerlidir:

❖ Doğal sayıların çarpma işlemine göre değişme özelliği $m\cdot n=n\cdot m,$
❖ Doğal sayıların çarpma işlemine göre birleşme özelliği $(m\cdot n)\cdot k=m\cdot(n\cdot k).$

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Doğal sayıların çarpma işlemine göre değişme ve birleşme özelliğini sözlerle ifade ediniz.
- Şu eşitlikler doğru mudur?
  a) 2·(35+21)=2·35+2·21; b) (15+24)·8=15·8+28·8?
- Doğal sayıların çarpma işlemi $\mathbb{N}_0$ genişletilmiş doğal sayılar kümesinde aynı şekilde tanımlanır mı? Çarpma işleminin değime ve birleşme özelliği $\mathbb{N}_0$ kümesinde doğru mudur?

Şu özellikler de geçerlidir:

❖ Her doğal sayı $m\in\mathbb{N}_0$ için, $m\cdot 1=1\cdot m=m$ ve $m\cdot 0=0\cdot m=0.$ geçerlidir.

Toplama ve çarpma işlemleri arasındaki bağıntı **dağılma özelliğiyle** veriliyor:

❖ Herhangi doğal sayılar $m,\ n,\ k\in\mathbb{N}$.için şu eşitlikler doğrudur:

$(m+n)\cdot k=m\cdot k+n\cdot k,$
$k\cdot(m+n)=k\cdot m+k\cdot n$ (çarpma işlemi toplamaya göre dağılma özelliği vardır)

Toplama ve çarpma işlemleri için birleşme kanunu, iki ya da üç doğal sayının toplamını parantezler kullanmadan hesaplamaya olanak sağlamaktadır, yani herhangi $m,\ n,\ k\in\mathbb{N}$ için şu eşitlikler doğrudur:

$(m+n)+k=m+(n+k)=m+n+k$ и $(m\cdot n)\cdot k=m\cdot(n\cdot k)=m\cdot n\cdot k$.

4 Çarpma işlemi:

a) $25+56\cdot 123$; b) $12\cdot(21+72)$; c) $35+21+55+69$; ç) $25\cdot 82\cdot 4\cdot 5$.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Çarpma işleminin $\mathbb{N}_0$ kümesinde toplama işlemine göre dağılma özelliği var mıdır?

5 Dağılma özelliğini uygulayarak şu eşitliğin doğru olduğunu ispatlayınız:

$(m+n)\cdot(k+p)=m\cdot k+m\cdot p+n\cdot k+n\cdot p$.

(Tavsiye: eşitliği ispatlamak için $a = m + n$ değişimini kullanabilirsiniz. Benzer şekilde $b = k + p$ olarak alabilir miyiz?)

Çıkarma işlemi: Çıkarma işlemini tanımlamadan önce, bildiğimiz bazı sonuçları hatırlayalım:

- $x + 25 = 125$ ve $125 + x = 527$ denklemlerinde x bilinmeyenini belirtmek için, toplamdan bilinen toplanan çıkarılır. Demek ki, bu gibi denklemleri çözmek için doğal sayılar kümesinde çıkarma işlemini tanımlamalıyız;
- $25 - 15$ farkı doğal sayıdır, fakat $25 - 55$ farkı doğal sayı değildir.

O halde, iki doğal sayı $m, n \in \mathbb{N}$ için $k = m - n$ **farkını** belirtmek, ancak $m = n + k$ olacak şekilde üçüncü bir k doğal sayısının varlığı ile mümkündür. m doğal sayısına **çıkarılan**, n doğal sayısına ise **çıkan** denir.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Herhangi iki doğal sayının farkı daima doğal sayı mıdır?

Herhangi iki doğal sayı $m, n \in \mathbb{N}$ için, ancak $m > n$ olduğu durumda $k = m - n \in \mathbb{N}$ dir. Bu gösteriyor ki, doğal sayılar kümesinde çıkarma işlemi iç işlem değildir (açıktır), yani çıkarma işlemi doğal sayılar kümesinde kısmi işlemdir denilebilir.

6 Hesaplayınız: a) $(956 - 782) \cdot 2$; b) $956 \cdot 2 - 782 \cdot 2$; c) $2 \cdot (156 - 82)$; ç) $2 \cdot 156 - 2 \cdot 8$.

Ne fark edebilirsiniz?

Çarpma işleminin çıkarma işlemine göre dağılma özelliği, doğal sayılar kümesinde çıkarma işlemi için geçerlidir:

❖ Herhangi $m, n, k \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ doğal sayılar için şu eşitlikler doğrudur:

$$(m-n) \cdot k = m \cdot k - n \cdot k,$$
$$k \cdot (m-n) = k \cdot m - k \cdot n$$

(çarpma işleminin, çıkarma işlemine göre dağılma özelliği vardır).

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Doğal sayıların çıkarma işlemi $\mathbb{N}_0$ genişletilmiş doğal sayılar kümesinde de aynı şekilde tanımlanır mı? $m, n \in$ ... için, $m - n \in \mathbb{N}_0$ doğru olması için hangi koşul sağlanmalıdır? Çarpma işleminin, çıkarma işlemine göre dağılma özelliği $\mathbb{N}_0$ kümesinde var mıdır?

Çarpma işlemi **kuvvet alma** işlemiyle bağıntılıdır. Her biri $m \in \mathbb{N}$, n tane çarpanın çarpımına m sayısının n - dereceden kuvveti denir ve $m^n = \underbrace{m \cdot m \cdot ... \cdot m}_{n}$, ile işaret edilir. n sayısına **kuvvetin üssü** ya da **derecesi** m sayısına ise **kuvvetin tabanı** denir. Kuvvetlerle ilgili şu özellikler doğrudur:

- ❖ $m, n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için $m^n > 0$ dır.
- ❖ $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ doğal sayıları için

$$m^n \cdot m^p = m^{n+p}, (m^n)^p = m^{n \cdot p}, (m \cdot n)^p = m^p \cdot n^p.$$

Bölme: Bölme işlemini tanımlamadan önce, bazı önemli sonuçları (kuralları) anımsayalım:

- $x\ .\ 25 = 100$ ve $20\ .\ x = 80$ denklemlerinde x değişkenini belirtmek için, çarpım bilinen çarpanla bölünür. Demek ki bu denklemleri çözmek için doğal sayılar kümesinde bölme işlemini tanımlamalıyız.
- $8 : 2$ bölümü doğal sayıdır, $8 : 17$ bölümü ise doğal sayı değildir.

Görüldüğü gibi, iki doğal sayı $m, n \in \mathbb{N}$ için $k = m : n$ **bölümünün** belirtmesi $m = n \bullet k$ olacak şekilde bir k doğal sayısının varlığına bağlıdır. m doğal sayısına **bölünen**, n doğal sayısına ise **bölen** denir.

Bu gösteriyor ki, doğal sayılar kümesinde bölme işlemi iç işlem değildir (açıktır), yani bölme işlemi doğal sayılar kümesinde kısmi işlemdir denilebilir.

7 Hesaplayınız: a) $(956 - 782) : 2$; b) $956 : 2 - 782 : 2$; c) $(156 + 82) : 2$; ç) $156 : 2 + 82 : 2$.

Nasıl sonuca varabiliriz?

Doğal sayılar kümesinde, bölme işleminin toplama ve çarpma işlemlerine göre dağılma özelliği vardır:

❖ Herhangi $m, n, k \in \mathbb{N}$, $m : k, n : k \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için şunlar geçerlidir:

$(m + n) : k = m : k + n : k$,

$(m - n) : k = m : k - n : k$ (bölme işleminin toplama ve çarpma işlemlerine göre dağılma özelliği vardır).

○ $8 : 3$ doğal sayı mıdır?

Bu örnekte verilen sayıların bölümü doğal sayı olmadığı açıktır, halbuki bu demek değildir ki bölme yapılamaz. Bu durumdaki bölmelere **kalanlı bölme** denir. 8 sayısını 3 ile bölerken bölüm 2 ve kalan 2 elde edilir, yani $8 = 3 \cdot 2 + 2$ biçiminde yazabiliriz.

Bu ise şu demektir:

- Herhangi m ve n doğal sayıları için, $m = n \cdot k + r;\ 0 \le r < n$ olmak üzere tek olarak belli $k,\ r \in \mathbb{N}_0$ sayıları vardır. k sayısına **bölüm**, r sayısına ise m ve n sayıların bölümünden elde edilen **kalandır**.

8 28 ile bölündüğünde bölüm 17 elde edilecek en büyük doğal sayıyı belirtiniz.

(Tavsiye: 28 ile bölündüğünde kalan 17 olan sayılar, $0 \le r < 28$ olmak üzere, $m = 28 \cdot 17 + r$ biçiminde yazılır. Bu sayı en büyük olması için kalan nasıl olmalıdır? Düşününüz!)

Şu özellikler doğrudur:

- Her doğal sayı $m \in \mathbb{N}$ için, $0 : m = 0$, çünkü $0 = m \cdot 0$ dır.
- Doğal sayı 0 ile bölünemez, çünkü 0 sayısıyla bölme tanımsızdır.

!

- Toplama ve çarpma işlemleri doğal sayılar kümesinde iç işlemlerdir, yani doğal sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı kümedir.
- Çıkarma ve bölme işlemleri ise doğal sayılar kümesinde kısmi işlemlerdir.

Bazı ödevlerde hesaplamalar yaparken tüm işlemlere rastlanabilir. Bu nedenle şu soru sorulur:

- Doğru sonucu elde etmek için işlemler hangi sıraya göre yapılmalıdır?

Bir ödevde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin yapılış sırasıyla ilgili şu kurala dikkat etmeliyiz:

!

- Ödevde parantezler yoksa, toplama ve çıkarma işlemlerinden önce çarpma ve bölme işlemleri yapılmalıdır. Ödevde parantezler varsa, önce parantezlerdeki işlemler yapılmalıdır.

9 Hesaplayınız: a) $(3 \cdot 81 - 23) \cdot 5 - 7 \cdot (51 \cdot 5 - 12 \cdot 13)$; b) $25 \cdot (3 \cdot 15 - 99 : 33) - 2 \cdot (250 : 50 + 5 \cdot 12 \cdot 7)$.

1.3. Problemlerin Çözümü

Burada birkaç metinli ödevin çözümüne geçeceğiz:

Örnek 1 Bir kamyon aynı günde üç markete çikolata götürüyor. Snikers çikolatalardan 1 kutuda 20 paket vardır, Milka çikolatalardan 1 kutuda 15 paket ve Mars çikolatalardan 1 kutuda 25 paket vardır. Birinci markette 5 kutu Snikers çikolata, 2 kutu Milka çikolata ve 1 kutu Mars çikolata götürmüştür. İkinci markette 4 kutu Snikers çikolata, 6 kutu Milka çikolata ve 7 kutu Mars çikolata götürmüştür. Üçüncü markette 8 kutu Snikers çikolata, 5 kutu Milka çikolata ve 2 kutu Mars çikolata götürmüştür. O gün kamyon her markette ayrı ayrı kaç kutu çikolata yollamıştır? Hangi markette en çok çikolata bırakmıştır? Snikers çikolatanın fiyatı 10 denar, Milka çikolatanın fiyatı 30 denar ve Mars çikolatanın fiyatı 8 denar ise, o gün satıcı toplam ne kadar para almıştır?

Birinci markette $5\cdot 20+2\cdot 15+1\cdot 25=155$ çikolata.

İkinci markette $4\cdot 20+6\cdot 15+7\cdot 25=345$ çikolata.

üçüncü markette $8\cdot 20+5\cdot 15+2\cdot 25=285$ çikolata. Demek ki, ikinci markette en çok çikolata satılmıştır.

Toplam kazanç: $155\cdot 10+345\cdot 30+285\cdot 8=14180$ denar.

Örnek 2 Bir eczane sahibi, baş ağrısı tedavisinde kullanılan en çok satılan ağrı kesici haplarından – analgetikler: analgin, kafetin ve nalgesin c ne kadar kâr elde edildiğini hesaplamak istemiştir. Bu nedenle o anda eczanede bu tür ilaçlardan kaçar paket olduğunu sayılmasını istemiş. Her kutuda 10' ar tane birim paketi varmış. Sayıldıktan sonra şunu tespit etmiştir: 20 kutu analgin, 15 kutu kafetin ve 25 kutu nalgesin c varmış. Analgetiklerin alış ve satış fiyatları şöyledir: Birim paket başına analgin alış fiyatı 10 denar, satış fiyatı 15 denar, birim paket başına kafetin alış fiyatı 15 denar, satış fiyatı 25 denar ve birim paket başına nalgesin c alış fiyatı 8 denar, satış fiyatı 15 denar. Bu analgetiklerin hepsi satıldığında eczanenin kârı ne kadar olacaktır? Hangi analgetikten eczanenin kârı en çoktur?

Elde edilen kâr:

- tüm analgin kutularından, $20\cdot 10\cdot (15-10)=1000$, denar,
- kafetin $15\cdot 10\cdot (25-15)=1500$, denar ve
- nalgesin c $25\cdot 10\cdot (15-8)=1750$.

En çok kâr nalgesin c satışından elde edilmiştir. Analgetiklerin satışından yapılan toplam kâr: $1000 + 1500 + 1750 = 4250$ denar.

Örnek 3 Baba, üç çocuğuna 15000 denarı aylık harçlık parası olarak eşit paylaştırmıştır. Her çocuk ne kadar para almıştır?

Çocuklardan her biri $15\,000 : 3 = 5000$ denar aylık harçlık parası almıştır.

Kendi başına çalışmak için alıştırmalar:

1. Verilen önermelerden hangisi doğrudur

a) $\neg(27 \neq 30)$; b) $\neg(27 \leq 30 \Rightarrow 24 > 14)$; c) $27 \leq 30 \Leftrightarrow 24 > 14$.

2. Şu kümeleri tablo usulüne göre yazınız:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$; b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 7 < x \leq 15\}$; c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 3\}$.

3. Verilen toplamları daha kısa olarak yazınız:

a) 3+3+3+3+3+3; b) 9+9+9+9; c) 10+10.

4. Verilen çarpımları kuvvet biçiminde gösteriniz, ondan sonra Hesaplayınız:

a) 2·2·2·2·2; b) 45·45; c) 12·12·12.

5. En kısa şekilde Hesaplayınız:

a) $156 + 28 + 344 + 372 + 100$; b) $342 + 75 + 92 + 258 + 8$;

c) $25 \cdot 9 \cdot 125 \cdot 4 \cdot 8$; ç) $500 \cdot 7 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 4$.

6. Hesaplayınız:

a) $25 + 31 \cdot 27 - 15$; b) $(31 - 15) \cdot 7 + 27 \cdot 15$; c) $(31 - 15) : 16 + 125 : 5$;

ç) $5 \cdot 889 - \left(25 : 5 + 7 \cdot \left(51 \cdot 5 - 12\right) \cdot 2\right)$; d) $\left(25 \cdot \left(15 + 69 : 3\right) - 2\right) + \left(250 - 17 \cdot 8\right)$.

7. Hangi en büyük doğal sayının 55 ile bölümünde kalan 21 olur.

8. Şu eşitliği ispatlayınız: $(m + n + e) \cdot (k + p) = m \cdot k + m \cdot p + n \cdot k + n \cdot p + e \cdot k + e \cdot p$.

9. Okuma yılı başında Toni'nin babası kitapların satın alınması için 12000 denar para vermiş. Toni kırtasiyede 650 denar matematik kitabı, Makedonca kitabına 880 denar, biyoloji kitabına ise 500 denar ödemiş; her üç ders için çalışma defterleri 250'şer denar, yazmak için 5 defter 120'şer denar ve güzel sanatlar dersi için 620 denar ödemiştir. Toni kaç para harcamıştır? Ne kadar parası kalmıştır?

10. İlmi ve Semi para biriktiriyormuş. Yeterince para biriktirdikten sonra, teknik eşya satılan bir dükkâna gitmişler. Orada 21 000 denar bir dizüstü bilgisayar, 2000 denar laptop çantası ve 5000 denar yönlendirici satın almışlar. İlmi ve Semi ne kadar para biriktirmişler?

11. Bir inşaatçı fiyatı 480 denar olan belli sayıda kirişler satın almalıdır. Aldığı kirişler için ödenmesi gereken parayı hesaplarken 408 ile çarpacak yerde hata yaparak 48 ile çarpmıştır. Bu şekilde 270 000 kadar bir hata yapmıştır. Tam çarpımı belirtiniz ve inşaatçının satın alması gereken kiriş sayısını da hesaplayınız. Bu kirişler için kaç denar ödemelidir?

2. Doğal Sayıların Bölünme Kuralları. Asal ve Bileşik Sayılar. EBOB ve EKOK

2.1. Doğal sayıların bölünme kuralları

Doğal sayılar kümesi ne olduğunu anladıktan sonra ve onlarla işlemleri ve bu işlemlerin özelliklerini tanımladıktan sonra şunları ifade edebiliriz:

- Herhangi iki m ve n doğal sayısı için, $m = n \cdot k + r, 0 \leq r < n$ olmak üzere, tek olarak belli k, $r \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. k sayısına bölüm, r sayısına ise m ve n sayılarının bölümünden elde edilen kalandır.
- Önceki ifadede $r = 0$ alırsak, şunu elde edeceğiz: iki doğal sayı m , $n \in \mathbb{N}$ için, $m = n \cdot k$ ise, $k = m : n \in \mathbb{N}$ bölümü doğal sayıdır.
- **2 ile bölünme kuralı:** Bir sayının son rakamı çift sayı, yani 0, 2, 4, 6 ya da 8 ise, o sayı 2 ile bölünür.
- **5 ile bölünme kuralı:** Bir sayının son rakamı 5 ya da 0 ise, o sayı 5 ile bölünür
- **3 ile bölünme kuralı:** Bir sayının rakamlarının toplamı 3 ile bölünüyorsa, o sayı 3 ile bölünür.
- **9 ile bölünme kuralı:** Bir sayının rakamlarının toplamı 9 ile bölünüyorsa, o sayı 9 ile bölünür.

Örnek 1 Verilen sayıların bölümünü Hesaplayınız:
a) 57 ve 2; b) 30 ve 5.

57 yi 2 ile bölerken bölüm 28 ve kalan 1 olduğunu her halde fark etmişsinizdir, yani $57 = 28 \cdot 2 + 1$. Halbuki 30 sayısını 5 ile bölmekle, bölüm 6 ve kalan 0 elde edilir, yani $30 = 6 \cdot 5$. 30 sayısını 5 ile bölerken, bölüm kalansız olduğunu diyebiliriz; bunu " 30 sayısı 5 ile bölünür" ya da "5 sayısı 30'u böler" ya da "5 sayısı 30'un kapsamındadır" ya da " 30 sayısı 5'in katıdır" biçiminde ifade edilir. Bu ifadeleri 57 sayısını 2 ile bölerken diyemeyiz.

Örnekle benzer olarak iki doğal sayı m ve n verilmiş olsun. Onların bölümü $k = m : n$ doğal sayı ise (kalan $r = 0$), onu $m = n \cdot k$ şeklinde yazabiliriz. Böyle durumda $n \mid m$ (n böler m diye okunur), fakat bunun anlamı "m sayısı n'in katıdır" da olabilir.

Örneğe dönersek, "30 sayısı 5' in katıdır" ya da "5 sayısı 30'un bölenidir" ifadeleri yerine $5 \mid 30$ yazalım. 57 sayısının 2 ile bölümünü ise $2 \nmid 57$ (oku: 2 sayısı 57'nin böleni değildir) şeklinde yazabiliriz.

❖ İki doğal sayı $m, n \in \mathbb{N}$ ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $n \mid m \Leftrightarrow m = n \cdot k$ doğrudur.

İki doğal sayının bölünebilmesi, çift ve tek sayıyı tanımlama imkanı verir.

❖ Böleni 2 sayısı olan her doğal sayı m **çift sayıdır.**
Bu nedenle her çift sayı $m = 2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$ biçiminde yazılır.

❖ 2 ile bölünmeyen her m doğal sayıya **tek sayı** denir.
Bu nedenle her tek sayı $m = 2 \cdot k + 1$ $k \in \mathbb{N}_0$ biçiminde yazılır.

1 Verilen ifadelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:
a) $2 \mid 5$; b) $5 \mid 65$; c) $6 \mid 50 \wedge 8 \mid 70$; ç) $9 \mid 90 \Rightarrow 3 \mid 20$.

2 a) 20; b) 11; c) 1 doğal sayıların bölenler kümesini belirtiniz.

2.2. Basit ve Bileşik sayılar

Yukarıdaki alıştırma 2 den şunları fark ediyoruz:

- 20 sayısının bölenleri: $1, 2, 4, 5, 10, 20$ dir.
- 11 sayısının bölenleri: 1 ve 11 dir.
- 1 doğal sayısının sadece bir böleni vardır, o da 1 dir.

❖ 1 ve kendi kendisi olmak üzere, tam iki böleni olan sayılara **asal sayılar** denir;

❖ 1 ile, kendi kendisi ile ve en az daha bir sayıyla bölünen sayıya **bileşik sayı** denir. Başka bir deyişle: Bileşik sayının ikiden fazla böleni vardır;

❖ 1 ne asal ne de bileşik sayıdır.

Alıştırma 2 deki 20 sayısı bileşik sayı, 11 ise asal sayıdır.

○ Verilen doğal sayılardan hangileri asal, hangileri ise bileşiktir: 21,99,17,51,321?

Eski yunan matematikçisi Eratosten (m.ö. $276 - 194$) asal sayıları diğer sayılardan ayırmak için, Eratosten eleği denilen bir yöntem bulmuştur. Biz burada ilk 50 doğal sayıya kadar bulunan asal sayıların nasıl elde edildiğini göstereceğiz:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Yöntem şudur:

1. 2 asal sayıdır ve siyah renkle kalıyor. 2 den başlayarak her ikinci sayı çifttir, yani onlar bileşik sayılardır ve onların rengi kırmızı oluyor;
2. 3 asal sayıdır ve siyah renkle kalıyor. 3 ten başlayarak her üçüncü sayı üç ile bölünür, yani onlar bileşik sayılardır ve onların rengi kırmızı oluyor;
3. 5 asal sayıdır ve siyah renkle kalıyor. 5 ten başlayarak her beşinci sayı beş ile bölünür, yani onlar bileşik sayılardır ve onların rengi kırmızı oluyor;
4. 7 asal sayıdır ve siyah renkle kalıyor. 7 den başlayarak her yedinci sayı 7 ile bölünür, yani onlar bileşik sayılardır ve onların rengi kırmızı oluyor;
5. 11 asal sayıdır ve siyah renkle kalıyor. 11 den başlayarak her on birinci sayı 11 ile bölünür, yani onlar bileşik sayılardır ve onların rengi kırmızı oluyor;
6. Siyah renkte 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 10, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 sayıları kaldığına göre, bunlar asal sayılardır.

Alıştırma 2 de, $20=4\cdot5=2^2\cdot5$ olduğunu fark edebilirsiniz yani bileşik sayı olan 20, asal sayıların çarpımı biçiminde gösterilebilir.

Şu soru sorulabilir: Bu gösterim tek olarak belli midir? Cevabı evettir, yani bu gösterim tek olarak bellidir. Aşağıdaki şema ile bileşik sayıları asal çarpanlarına ayrılma yöntemini hatırlayabiliriz:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$20=2\cdot2\cdot5=2^2\cdot5.$$

3 Şu sayıları asal çarpanlarına ayırınız: a) 782; b) 1255; c) 223.

Asal sayı olan 223 doğal sayısı verilmiş olsun. Bu sayıyı kendinden küçük her doğal sayıyla bölünüp bölünmediğini, yani bölüm doğal sayı olup olmadığını yoklamak için çok zaman gerekir. Bu nedenle, büyük sayıların asal olup olmadığını en hızlı şekilde nasıl belirtebiliriz sorusu ortaya koyulur. Cevap basittir: Asal olup olmadığını yokladığımız 223 sayısını 2 den başlayarak ve karesi

223’ten büyük olmayacak şekilde sadece asal olan sayılarla bölüyoruz. Bu şekilde 223 sayısının asal olup olmadığını yoklamak için onu sadece 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sayılarıyla bölmekle, bölüm doğal sayı olup olmadığını yoklayabiliriz. 17 sayısıyla duruyoruz, çünkü 17 • 17 = 289 > 223 tür.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Asal sayılar kümesi sonlu yoksa sonsuz küme midir?

!

- Bileşik doğal sayıları tek olarak belli asal sayıların çarpımı biçiminde gösterebiliriz;
- 2’ den başlayarak ve karesi verilen sayıdan büyük olmayan her asal sayıyla bölünmeyen doğal sayı asal sayıdır.
- Tüm asal sayılar kümesi sonsuz bir kümedir.
- 1 den büyük her doğal sayı, ya asal sayı ya da asal sayıların çarpımı biçiminde gösterilebilen sayıdır.

4 Şu sayılardan hangileri asal sayı olduğunu yoklayınız: 1229,889,789,2231?

EBOB ve EKOK

İki ya da daha fazla sayının EBOB ve EKOK kavramını açıklamak şçşn şu örnekleri inceleyeceğiz:

- 12 sayısının bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 dir. 20 sayısının bölenleri: 1, 2, 4, 5,10 ve 20 dir. Onların ortak bölenlerin kümesi 1, 2 ve 4 sayılarıdır. Onların ortak bölenleri sonlu kümedir. Buna göre 12 ve 20 sayılarının en büyük ortak böleni 4 sayısıdır, ona EBOB denir ve EBOB$(12,20)=4$ biçiminde yazılır.
- Bunun bulunma yöntemi şu şema ile gösterilmiştir:

$$\begin{array}{r|l} 12,\ 20 & 2 \\ 6,\ 10 & 2 \\ 3,\ \ 5 & \end{array}$$

$$\text{EBOB}\left(12,20\right)=4$$

- 10 sayısının katları: $10, 20, 30, 40, 50, 60, \ldots$.. sayılarıdır, 15 sayısının katları ise: $15, 30, 45, 60, \ldots$. sayılarıdır. Onların ortak katlarının kümesi: $30, 60, 90, \ldots$ sayılarıdır. Onların ortak katlarının kümesi sonsuz kümedir. 10 ve 15 sayılarının en küçük ortak katı 30 sayısıdır, onu EKOK ile işaret eder ve EKOK$(10, 15) = 30$ biçiminde yazarız.

Bunun bulunma yöntemi şu şema ile gösterilmiştir:

$$\begin{array}{r|l} 10,\ 15 & 2 \\ 5,\ 15 & 3 \\ 5,\ \ 5 & 5 \\ 1,\ \ 1 & \end{array}$$

EKOK $(10,15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

5 a) 10 ve 27; b) 25 ve 39; c) 81, 135 ve 126 sayılarının EBOB ve EKOK'tı belirtilsin. EBOB$(10, 27) = 1$ olduğunu fark edebilirsiniz.

EBOB' i 1 olan bu gibi sayıları **aralarında asaldır** denir. Aralarında asal olan sayılarda EKOK(10, 27) = 10 · 27 =270 olarak bulunur.

6 Şu sayılardan hangileri aralarında asaldır: a) 25 ve 39; b) 21 ve 90?

!

- ❖ İki ya da daha çok doğal sayının ortak bölenlerinin kümesi daima sonlu kümedir.
- ❖ İki ya da daha fazla doğal sayının EBOB'i, onların ortak bölenlerinin en büyüğüdür. Bu sayı, onların ortak çarpanlarının çarpımı ile elde edilir.
- ❖ İki ya da daha çok doğal sayının ortak katlarının kümesi daima sonlu kümedir.
- ❖ İki ya da daha fazla doğal sayının EKOK'ı, onların ortak katlarının en küçüğüdür.
- ❖ İki doğal sayı m ve n için EBOB$(m, n) = 1$ ise, onlara **aralarında asaldır** denir. Onların EKOK$(m, n) = m \cdot n$ dir.

2.4. Problemlerin çözümüİlerde

birkaç pratik ödevin çözümü verilmiştir:

Örnek 2 Şu iddiaları ispatlayınız:

a) İki çift sayının toplamı çift sayıdır;

b) İki çift sayının çarpımı çift sayıdır.

m_1, m_2 iki doğal sayı olsun. O halde onları bazı $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ için $m_1 = 2k_1,\ m_2 = 2k_2$ biçiminde yazılabilir.

a) $m_1 + m_2 = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2),\ k_1 + k_2 \in \mathbb{N}$ toplam çift sayıdır.

b) $m_1 \cdot m_2 = 2k_1 \cdot 2k_2 = 2 \cdot 2k_1k_2,\ 2k_1k_2 \in \mathbb{N}$ çarpım çift sayıdır.

Örnek 3 Şu iddiaları ispatlayınız:

a) $k \mid m \wedge k \mid n \Rightarrow k \mid (m+n)$;

b) $k \mid m \vee k \mid n \Rightarrow k \mid (m \cdot n)$

a) Bazı $p, q \in \mathbb{N}$için, $k \mid m \wedge k \mid n \Leftrightarrow m = p \cdot k \wedge n = q \cdot k,$ dir.

O halde $m + n = p \cdot k + q \cdot k = k(p+q), p+q \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k \mid (m+n)$

b) Bazı $p, q \in \mathbb{N}$ çin, $k \mid m \vee k \mid n \Leftrightarrow m = k \cdot p \vee n = k \cdot q$ dir.

O halde $m \cdot n = p \cdot k \cdot q \cdot k = k(kpq), kpq \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k \mid (m \cdot n)$.

Örnek 4 Herhangi m ve n doğal sayıları için $(m+n)^2 - (m-n)^2$ ve $(m+n)^2 + (m-n)^2$ bileşik sayılar olup olmadığını yoklayınız.

$(m+n)^2 - (m-n)^2 = \cancel{m}^2 + 2mn + \cancel{n}^2 - \cancel{m}^2 + 2mn - \cancel{n}^2 = 4mn$ elde edilir. Buna göre, ifadedeki sayı bileşik sayıdır.

Benzer şekilde $(m+n)^2 + (m-n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2 = 2(m^2 + n^2)$ elde edilir. Buna göre, ifadedeki sayı bileşik sayıdır.

Örnek 5 Bir dükkanda aynı kaliteden fakat farklı tasarımlı ve farklı uzunlukta: biri 48 metre, diğeri ise 36 metre olmak üzere iki top kumaş vardır. Satıcı, müşterileri için her iki toptan olmak üzere, tasarımı ve uzunluğu aynı olan eşit parçalar kesmek istemiştir. Satıcı her iki toptan kumaşları eşit tasarımlı ve kaliteli en çok hangi uzunlukta kesebilir?

48 metre ve 36 metre sayılarının EBOB' nini bulacağız.

48, 36	2
24, 18	2
12, 9	3
4, 3	

EBOB $(48,36)=12$

Her iki topun eşit parçalara bölüneceği maksimum uzunluk 12 metredir.

Örnek 6 Uluslararası bir havaalanında aynı gün üç uçak kalkar. Birincisi her 2 günde döner, ikincisi her 3 günde, üçüncüsü ise her 5 günde döner. Üçü de kaç gün sonra aynı gün tekrar havalanacaklar?

2, 3 ve 5 sayılarının EKOK' ı bulunmalıdır.

2,3,5	2
1,3,5	3
1,5	5
1	

EKOK $(2,3,5)=30$.

Her üç uçak 30 gün sonra yine aynı günde havalanacaklar.

Örnek 7 Bir çiçekçi dükkanında çalışanlar sekiz mart için, eşit buketler yapıyorlar. 480 karanfil, 280 kırmızı gül ve 300 zambaktan kaç eşit buket yapılabilir?

480, 280 ve 300 sayılarının EBOB' i bulunmalıdır.

480,450,510	2
240,225,255	5
48, 45, 51	3
16, 15, 17	

EBOB $(480,280,300)=30$.

Buna göre en çok 20 şer buket yapılabilir ve her bukette 24 karanfil, 14 kırmızı gül ve 15 zambak olacaktır.

Kendi başına çalışmak için alıştırmalar

1. Verilen her sayının bölenler kümesini belirtiniz: a) 125; b) 565; c) 232.

2. Şu sayıları çarpanlarına ayırınız: a) 175; b) 550; c) 1250.

3. Verilen sayıların katlarının kümesini belirtiniz: a) 8; b) 16; c) 23.

4. Verilen sayılardan hangileri asal, hangileri ise bileşik sayıdır:
a) 257; b) 943; c) 430?

5. $m^2 + 14$ sayısı asal olacak şekilde, m asal sayısını belirtiniz.

6. Herhangi m doğal sayı için, $(m + 2)^2$-$(m$-$2)^2$ ve
$(m + 7)^2 + (m$-$7)^2$ ifadeleri bileşik sayı olup olmadığını yoklayınız.

7. 18 ve 24 sayılarının EKOK ve EBOB' ini bulunuz. Ondan sonra, EBOB$(a,b) \cdot$ EKOK (a,b) $= a \cdot b$ eşitliği doğru olup olmadığını yoklayınız.

8. Verilen sayıların EBOB ve EKOK' ını belirtiniz: a) 42,20 ve 30; b) 12,18 ve 25.

9. Verilen doğal sayı çiftlerinden hangileri aralarında asaldır belirtiniz:
a) 12 ve 18; b) 27 ve 55; c) 36 ve 49.

10. Şu iddiaları ispatlayınız:
a) İki tek sayının toplamı tek sayıdır, halbuki onların çarpımı tek sayıdır;
b) Bir çift ve bir tek sayının toplamı tek sayıdır, halbuki onların çarpımı çift sayıdır.

11. Şu iddiaları ispatlayınız:
a) $k \mid m \wedge k \mid n \wedge m > n \Rightarrow k \mid (m-n)$; b) $k \mid (m+n) \wedge k \mid n \Rightarrow k \mid (m+n)$.

12. Her doğal sayı n için: a) $5|(5+10^n)$, b) $5|(n^5-n)$, iddiası doğru olduğunu ispatlayınız.

13. Herhangi ardışık üç doğal sayının toplamı 3 ile bölündüğünü ispatlayınız.

14. Şunu ispatlayınız: Bir sayı 2 ve 3 ile bölünüyorsa, o sayı 6 ile bölünür.

15. İmer ve Teuta sahip oldukları inşaat şirketine belli sayıda tahta satın almaları gerekir. Her biri üç basamaklı sayı miktarında tahta satın alacaktır, öyle ki her ikisinin üç basamaklı sayısı 45 ile bölünmelidir ve orta basamaktaki sayı 8 olmalıdır. İmer Teutadan daha fazla tahta satın aldığını bildiğimize göre, her biri kaçar tane tahta satın almış olduğunu belirtiniz.

16. Bir depoda, biri 15 metre, diğeri ise 18 metre olmak üzere 2 cins tel vardır. Depoda çalışan, müşterinin isteğine göre iki cins telden eşit parçalar kesmelidir. Kesilecek tel parçaları en uzun ne kadar olabilir?

17. Bir tren istasyonunda dört tren aynı saatte hareket etmektedir. Birinci tren her 10 saatte geriye dönüyor, ikinci tren her 8 saatte, üçüncü tren her 9 saatte ve dördüncü tren her 12 saatte geriye dönüyor. Kaç saat sonra 4 tren yine aynı saatte hareket edecekler?

18. Bir pastanede çalışanlar, Noel kutlamaları için çeşit tatlılardan eşit paketler yapmaları gerekir. 15 pasta, 6 tulumba ve 9 baklavadan en çok kaç paket yapılabilir?

3. Tam Sayılar ve Tam Sayılarla İşlemler

3.1. Tam Sayılar

Doğal sayıları tanımladıktan sonra, tam sayılar diye adlandırılan yeni bir sayı kümesiyle tanışacağız. Bunu yapmak için şu tespitlerle başlayacağız:

- İki doğal sayı m ve $m,n \in \mathbb{N}$ için, $k = m - n \in \mathbb{N}$ sayısı ancak $m > n$ olduğunda doğal sayıdır.
- $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesine 0 sayısını katarak $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ genişletilmiş doğal sayılar kümesi elde edilir. Bu durumda, her m ve $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ için de çıkarma işlemi $k = m - n$ mümkündür.

1 $x + 10 = 5$ denklemini $\mathbb{N}$ kümesinde çözünüz. Çözüm $\mathbb{N}_0$ kümesinde mümkün müdür?

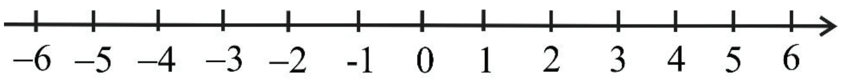
Verilen denklemin çözümü $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde olmadığı açıktır. $\mathbb{N}_0$ genişletilmiş doğal sayılar kümesinde de çözümü yoktur. Bu nedenle $n, m \in \mathbb{N}$ ve $m < n$ durumunda $x + n = m$ cinsinden denklemleri çözmek için, doğal sayılar kümesine yeni bir genişletme yapılmasına ihtiyaç vardır. Genişletmeyi doğal sayılara ters olan $-1, -2, -3, \ldots$sayılarla başlıyoruz. Bunlara negatif tam sayılar denir ve $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \ldots..\}$ ile işaret edilir.

Buna göre, doğal sayılar kümesini pozitif tam sayılar kümesi e adlandırabiliriz ve $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ biçiminde işaret ediyoruz. Bu anlamda 0 sayısı ne pozitif ne de negatiftir.

!

- **Tam sayılar kümesi,** tüm pozitif sayıları, tüm negatif sayıları ve sıfır sayısını içerir, yani $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$. Tam sayılar kümesini $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$ile işaret ediyoruz.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$ doğrudur.

Bu kümenin ne en küçük, ne de en büyük sayısı olmadığını fark ediyoruz.
Tam sayılar kümesini sayı doğrusu üzerinde geometrik şekilde gösterebiliriz:



Negatif sayıların tümü, pozitif sayıların ve sıfırın solunda bulunduğuna göre, negatif sayıların her biri pozitif sayılardan ve sıfırdan küçüktür. Buna göre tam sayıları şu şekilde sıralayabiliriz:

...$-3<-2<-1<0<1<2<3\ldots$ Negatif tam sayılar, pozitif sayıların tersi olduğunu dedik, halbuki pozitif sayılar da negatif tam sayıların tersidir.

2 Şu tam sayıların tersi olan tam sayıları belirtiniz: 256, -1250 ve -5230.

3 Şu sayıları büyüklüklerine göre sıralayınız: -256,4208,0,1203, -4503,256, -25.

!

$m \in \mathbb{Z}$ olsun. m tam sayısının mutlak değeri şu şekilde tanımlanır:

$$|m| = \begin{cases} m, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -m, & m<0 \end{cases}$$

Örnek 1 $|-5|=5, |0|=0, |6|=6$, yani pozitif tam sayının mutlak değeri aynı sayıdır, 0 sayısının mutlak değeri 0 dır ve negatif tam sayıların mutlak değeri onun tersidir.

Şunu fark etmelisiniz:

- Ters tam sayıların mutlak değeri aynıdır, yani $|-m|=|m|$ için $m \in \mathbb{Z}$ için $|-m|=|m|$ dir.

4 Şu sayıların mutlak değerini bulunuz: -1250,65,998, -875,0.

5 Şu sayıları büyüklüklerine göre sıralayınız: -125,-2546,0,125,36.

3.2. Tam Sayılarla İşlemler

Tam sayıları toplama, çıkarma, çarpma ve bölme:

- Şunları biliyoruz, $(+5)+(+7)=(+12)$, $(+7)+(-5)=(+2)$, $(+7)+(-9)=(-2)$, $(-7)+(-5)=(-12)$.
  Tam sayılar şu şekilde toplanır: toplananlar aynı işaretli olduğunda işaret aynı yazılır, sayılar ise mutlak değerce toplanır. Toplananlar farklı işaretli olduğu durumda, mutlak

değeri büyük olan tam sayıdan mutlak değeri küçük olan tam sayı çıkarılır ve ön işaret olarak mutlak değeri büyük olan sayının işareti yazılır.

- Çıkarma işlemi için şu örnekleri inceleyelim: (+ 5) − (+ 7) = (+ 5) + (−7) = (−2), (+ 7) − (+ 5) = (+ 7) + (−5) = (+ 2), (+ 7) − (−5) = (+ 7) + (+ 5) = (+ 12), (−7) − (−5) = (−7) + (+ 5) = (−2). Tam sayıları çıkarma işleminde çıkan tam sayının tersi yazılarak çıkarılan ile toplanır ve devamında tam sayıların toplamı kuralına göre hareket edilir.

- Çarpmayı şu örneklerle hatırlayalım: $(+5)\cdot(+7)=(+35)$, $(+7)\cdot(-5)=(-35)$, $(-7)\cdot(+5)=(-35)$, $(-7)\cdot(-5)=(+35)$. Tam sayıların çarpımı şu şekilde yapılır: Çarpanlar farklı işaretli ise, onların mutlak değerleri çarpılır ve çarpımın ön işareti olarak “ – “ yazılır. Çarpanlar aynı işaretli ise, onların mutlak değerleri çarpılır ve çarpımın ön işareti olarak “ + “ yazılır. Çarpanlardan en az biri 0 ise, onların çarpımı 0 dır.

- Bölmeyi şu örneklerle hatırlayalım:(+ 35): (+ 7) = (+ 5), (+ 35): (−7) = (−5), (−35): (+ 7) = (−5), (−35): (−7) = (+ 5).Tam sayıların bölümü şu şekilde yapılır: Sayılar farklı işaretli ise, onların mutlak değerleri bölünür ve bölümün ön işareti olarak “ – “ yazılır. Sayılar aynı işaretli ise, onların mutlak değerleri bölünür ve bölümün ön işareti olarak “ + “ yazılır.

6 Hesaplayınız:

a) $(-8)-(-6)$; b) $(+25)-(-12)$; c) $(-64):(-8)$; ç) $(+3)\cdot(-16)$;

d) $-5\cdot(-5+8\cdot(-2))-50:(2-(-2)\cdot 4)$.

Uyarı: Pozitif sayıları genellikle işaretsiz ve parantez kullanmadan yazarız. Negatif sayılar ise daima ön işaretiyle yazılır ve parantezlerden sadece gereksiz olanlar yazılmaz. Örnek olarak alıştırma 5 d)’ ye bakabilirsiniz.

Düşününüz ve cevaplayınız!
- İki ters sayının toplamı nasıldır?

!

- Her dir. $m\in\mathbb{Z}$ için, $m+(-m)=-m+m=0$
- Her $m,n\in\mathbb{Z}$. için $|m\cdot n|=|m|\cdot|n|$, $|m+n|\leq|m|+|n|$, $|m-n|=|n-m|$, dir.
- Tam sayılarla toplama ve çarpma işlemlerine toplamanın ve çarpmanın değişme özelliği geçerlidir.

7 Verilen denklemleri çözünüz: $x \cdot 5 = 25;\quad 6 \cdot x = -36;\quad x:(-5) = -5;\quad 25:x = 5;\quad 6 \cdot x = 5$.

Herhangi iki tam sayının toplamı, farkı ve çarpımı tam sayı olduğunu biliyoruz. Halbuki, bu özellik bölme işlemi için de geçerli midir? Diğer denklemlerden farklı olarak, $6 \cdot x = 5$denkleminin tam sayılar kümesinde çözümü olmadığını fark ediyoruz.

!

- Toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri tam sayılar kümesinin iç işlemleridir, yani tam sayılar kümesi toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır.
- Bölme işlemi tam sayılar kümesinin iç işlemi değildir, yani tam sayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı değildir. Bölme işlemi tam sayılar kümesinde kısmi işlemdir.

3.3. Problemlerin çözümü

İlerde birkaç reel örneği inceleyeceğiz.

Örnek 2 Bir kentte bir kış haftasında hava sıcaklığı: $-9^0, -2^0,\ 2^0,\ -5^0,\ 0^0,\ -1^0, 1^0$. . olmuştur. Haftalık ortalama sıcaklığı hesaplayınız.

Verilen yedi sıcaklık ölçülerinin aritmetik ortalaması hesaplanır.
$\left(-9^0 + \left(-2^0\right) + 2^0 + \left(-5^0\right) + 0^0 + \left(-1^0\right) + 1^0\right) : 7 = -2^0$ olduğunu buluyoruz.
Belirtilen hafta için ortalama kış sıcaklığı -2^0 dir.

Örnek 3 Dört ardışık tam sayının toplamı -22 dir. Bu sayılar hangileridir?

Ardışık tam sayıları $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n, n+1, n+2, n+3$ ile işaret edeceğiz. Bu durumda:

$$
\begin{aligned}
&n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = -22 \\
&4n + 6 = -22 \\
&4n = -28 \\
&n = -7
\end{aligned}
$$

Buna göre, aranılan tam sayılar $-7, -6, -5, -4$ tür.

Kendi başına çalışmak için alıştırmalar

1. Verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $-2>5$; b) $0<5$; c) $|-6|=-6$; ç) $|9|=-9$; d) $-7\in\mathbb{Z}$; e) $\mathbb{Z}^{+}\subset\mathbb{Z}$; f) $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^{+}\cup\mathbb{Z}^{-}$.

2. Verilen tam sayıların tersini belirtiniz, ondan sonra büyüklüklerine göre sıralayınız:
$-1258,\ 987,\ -8746, -203,\ 1223.$

3. Verilen sayıların mutlak değerlerini bulunuz ve büyüklüklerine göre sıralayınız:
$-1258, 0,\ 987,\ -8746, -203,\ 1223..$

4. Hesaplayınız:

a) $(+12)+(+54)$; b) $(+27)-(-63)$; c) $(-25)+(-64)$; ç) $(-56)-(-25)$;

d) $(-5)\cdot(-8)$; e) $(-6)\cdot(+6)$; f) $(-42):(-6)$; g) $(+56):(-9)$.

5. Gereksiz olan parantezleri ve işaretleri kaldırınız:

a) $(-5):(-1)+(-8)\cdot((+3)-(-2)\cdot(+6))$; b) $(-7)-(-2)\cdot((-1)+(-10):(+2))$;

c) $((+5)\cdot(-2)-(-3))\cdot(-7)$; ç) $(12-5\cdot7)\cdot(15-(5-4)\cdot5-7\cdot(-2))$.

6. Verilen ifadenin değerini Hesaplayınız:

a) $|15-17|-|-5|+|-23+25|$; b) $|x-5|-2|x-1|+3|x|$ için $x=-5$.

7. $m=-8$ ve $n=-11$ için, $|m\cdot n|=|m|\cdot|n|, |m+n|\leq|m|+|n|, |m-n|=|n-m|$ ifadenin doğru olup olmadığını yoklayınız.

8.
İspatlayınız: a) $\dfrac{|m|+m}{2}=\begin{cases}0, & m\leq 0\\ m, & m>0\end{cases}$; b) $|-m|=|m|$; c) $|m-n|=|n-m|$.

9. Bir kentte bir yıl boyunca tespit edilen aylık hava sıcaklıkları veriliyor:
-9^0, -3^0, 2^0, 8^0, 13^0, 18^0, 29^0, 31^0, 26^0, 19^0, 10^0, 0^0. Ortalama aylık sıcaklığı hesaplayınız.

10. Sabina bir kış gününde beş gün sabah, öğlen ve akşam hava sıcaklığını ölçmüştür. Şu sonuçları elde etmiş:

İlk gün: -10^0, 3^0, -8^0;

İkinci gün: -9^0, 5^0, -2^0;

Üçüncü gün: -10^0, -3^0, -5^0;

Dördüncü gün -6^0, 3^0, -9^0;

Beşinci gün -7^0, 4^0, 0^0.

Ondan sonra, her günün ayrı ayrı ortalama sıcaklığını hesaplamış. Sabina hangi sonuçları elde etmiştir? Hangi gün hava en soğukmuş?

11. Ardışık yedi tam sayının toplamı 14 tür. Bunlar hangi sayılardır?

4. Rasyonel Sayılar

4.1. Rasyonel Sayılar

Çok önemli olan daha bir sayı kümesini inceleyelim.

- $2 \cdot x = 1$ denkleminin $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinde çözümü yoktur.
- $m \cdot x = n$ denkleminin bazı durumlarda $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinde çözümü yoktur.

Bu nedenle $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini kesirler diye adlandırılan yeni sayılarla genişleteceğiz. $2 \cdot x = 1$ denkleminin yeni kümede, $x = \frac{1}{2}$ olmak üzere çözümü vardır. Bu sayıya kesir denir. Burada 1 sayısına kesrin payı, 2 sayısına ise kesrin paydası denir ve bölme işleminin işaretini ifade eden çizgiye ise, kesir çizgisi denir. Kesir $\frac{m}{n} = m : n, n \neq 0$. sayısıdır.

Tüm kesirleri içeren kümeye rasyonel sayılar kümesi denir.

Diğer bir değişle kesir rasyonel sayıdırç Örnek olarak: $\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{-15}{6}, \frac{5}{-2}, \ldots$ kesirlerdir.

!

❖ **Rasyonel sayılar kümesini** $\mathbb{Q}$ ile işaret ediyoruz. Bu kümeyi $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$ ya da $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. şeklinde ifade edebiliriz.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Doğal sayılar, aynı zamanda rasyonel sayılar mıdır?
- Tam sayılar, aynı zamanda rasyonel sayılar mıdır?
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ biçiminde kesirler nasıl, $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}$, nasıl, $1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}$ ise nasıl adlandırılır?
- Şu kesirlerden: $\frac{2}{5}, \frac{0}{2}, \frac{-15}{0}, \frac{5}{-2}$ hangilerinin anlamı vardır?

Örnek 1 $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}$ biçiminden kesirlere tam sayılı kesirler denir ve $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ örneklerinde olduğu gibi bileşik kesir biçiminde dönüşebilirler.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Hangisi, basit yoksa bileşik kesir 1 den büyüktür?

!

- Her tam sayı aynı zamanda rasyonel sayıdır.
- $m < n$ durumunda $\frac{m}{n}$ kesri basittir (düzgün), $m >$ n durumunda ise kesir bileşiktir, $n\,|m$ şekli de kesir görünümüdür.
- $\frac{m}{0}$ şeklinden ifadenin anlamı yoktur, çünkü 0 ile bölme işlemi tanımlı değildir.

4.2. Kesirleri genişletme, kısaltma ve paydalarını eşitleme

$25 : 5 = 5$ ifadesinin doğru olduğunu biliyorsunuz, fakat $(25:5):(5:5)=5$ ve $(25\cdot 2):(5\cdot 2)=5$ ifadeleri de doğrudur. Bölme işaretini kesir çizgisiyle değiştirirsek $\frac{25}{5} = \frac{25:5}{5:5} = \frac{25\cdot 2}{5\cdot 2}$ elde ediyoruz. Buna göre, yukarda verilmiş olan $25/5$ kesri önce 5 ile kısaltılmış, ondan sonra 2 ile genişletilmiştir. Görüldüğü gibi, $\frac{25}{5}$ kesrine eşit olan kesirler elde edilmiştir.

Örnek 2 $\frac{10}{20}$ kesrini alalım. Bu kesri 2 ile kısaltırsak $\frac{10:2}{20:2} = \frac{5}{10}$ elde edilir. Halbuki $\frac{10}{20}$ kesri 5 sayısı ile de kısaltılabilir ve $\frac{10:5}{20:5} = \frac{2}{4}$. kesri elde edilir. $\frac{10}{20}$ kesri 10 sayısı ile de kısaltılabilir ve $\frac{10:10}{20:10} = \frac{1}{2}$. kesri elde edilir. $\frac{5}{10}$ ve $\frac{2}{4}$ kesirleri daha fazla da kısaltabildiğini fark ediyoruz, birincisi 5, ikincisi ise 2 ile. Fakat $\frac{1}{2}$ kesri daha fazla

Kısaltılamaz. EKOK$(1,2) = 1$ olduğundan bu gibi ifadelere kesirlerin en sade hali denir.

!

- Bir $\frac{m}{n}, n \neq 0$ kesrin pay ve paydasını, $k \neq 0$ olmak üzere aynı bir sayıyla bölersek, yani $\frac{m}{n} = \frac{m:k}{n:k}, n \neq 0$ **kesri $k \neq 0$ sayısıyla kısaltmış** oluyoruz.
- Bir $\frac{m}{n}, n \neq 0$ kesrin pay ve paydasını, $k \neq 0$ olmak üzere aynı bir sayıyla çarparsak, yani $\frac{m}{n} = \frac{m:k}{n:k}, n \neq 0$ **kesri $k \neq 0$ sayısıyla genişletmiş** oluyoruz.
- Bir kesrin pay ve paydası aralarında asal ise, kesir en sade şekilde verilmiştir denir.

1 $\frac{35}{70}$ kesrini 7 ile kısaltınız. Elde edilen kesir en sade halinde midir? Eğer değilse, kesri en sade halinde getiriniz.

2 Verilen kesirleri 3 ile genişletiniz 3: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{5}$.

Kesirleri genişletme yönteminden yararlanarak kesirlerin paydalarını eşitleyebiliriz.

Örnek 3 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ Kesirleri verilmiş olsun. Bunların paydalarını eşitleyelim. Bu nedenle paydaların en küçük ortak katını buluyoruz. EKOK$(2,3)=6$ olduğuna göre, her kesri paydası 6 olacak şekilde genişletiyoruz: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{6} = \frac{3}{6}, \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{6} = \frac{4}{6}$.

3 Verilen kesirlerin paydalarını eşitleyiniz:

a) $\frac{8}{9}, \frac{11}{18}, \frac{5}{6}$; b) $1\frac{2}{3}, 2\frac{10}{15}, 3\frac{5}{6}$; c) $\frac{2}{5}, 1\frac{5}{16}, 2\frac{5}{6}$.

4.3. Rasyonel Sayıların Sıralanması

Düşününüz!

$\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ kesirlerini nasıl karşılaştıracağız?

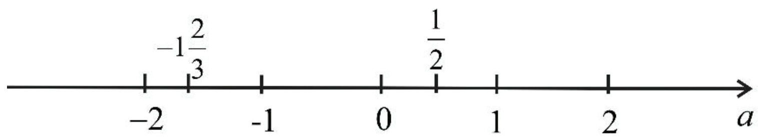
Bu kesirleri karşılaştırmak için, onların paydalarını eşitlemek gerekir, ondan sonra şu şekilde karşılaştıracağız: paydaları aynı olan kesirlerden payı büyük olan büyüktür.

Örnek 4 $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ kesirlerin paydalarını eşitliyoruz: $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}, \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$. Bu durumda $\frac{6}{15} > \frac{5}{15}$ olduğundan, $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$ elde edilir.

4 Şu kesirleri karşılaştırınız: a) $\frac{2}{15}, \frac{3}{10}$; b) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$.

5 Verilen kesirleri büyüklüklerine göre sıralayınız: $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$.

Rasyonel sayıları geometrik şekilde bir a sayı doğrusu üzerinde gösteriyoruz:



6 Verilen kesirleri sayı doğrusu üzerinde gösteriniz: $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$.

Sayı ekseninde görüldüğü gibi, iki rasyonel sayı arasında daima başka bir rasyonel sayı vardır.

❖ Herhangi iki rasyonel sayı arasında rasyonel sayı vardır, yani rasyonel sayılar kümesi, yoğun sıralı kümedir.

❖ Herhangi iki kesir için, $m \cdot q = n \cdot p$ eşitliği varsa $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, n \neq 0, q \neq 0$ kesirleri birbirine eşittir diyeceğiz.

Örnek 5 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ kesirleri birbirine eşittir, çünkü $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ dir.

7 Verilen kesirler birbirine eşit olup olmadıklarını yoklayınız: a) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$; b) $\frac{12}{15}, \frac{4}{5}$.

Düşününüz!

- 5 saısına karşılık gelen $\frac{1}{5}$ sayısına ne denir?

❖ Sıfırdan farklı verilen bir m sayısına karşılık gelen $\frac{1}{m}$ kesrine m sayısının çarpımsal tersi denir.

8 Verilen rasyonel sayıların çarpımsal tersini bulunuz: $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{12}{15}, \frac{4}{5}$.

Kendi başına çalışmak için alıştırmalar:

1. Şu anda saat öğlenin 12 sini gösteriyor. 24 saatlık zaman diliminin geçilen ve kalan kısımlarını kesirlerle yazınız.

2. m in hangi değeri için verilen ifadenin anlamı yoktur: a) $\frac{5}{m}$; b) $\frac{3}{m-2}$; c) $\frac{2m-1}{m^2-1}$.

3. Kesirleri genişletiniz: a) $\frac{8}{9}$ ile 2; b) $\frac{7}{6}$ ile 2; c) $\frac{1}{2}$ ile 9.

4. Verilen kesirleri en sade halinde yazınız: $\frac{125}{625}, \frac{81}{243}, \frac{64}{320}$.

5. Verilen kesirleri kısaltınız: a) $\dfrac{240\cdot 80\cdot 45}{16\cdot 27\cdot 125\cdot 24}$; b) $\dfrac{24\cdot 55\cdot 27}{64\cdot 33\cdot 42}$.

6. Kesirleri karşılaştırınız: a) $\dfrac{5}{12}$ ve $\dfrac{8}{9}$; b) $\dfrac{7}{6}$ ve $\dfrac{7}{9}$; c) $\dfrac{9}{17}$ ve $\dfrac{1}{2}$.

7. Verilen kesirleri büyüklüklerine göre sıralayınız: $-\dfrac{5}{12}, \dfrac{5}{9}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}$ ve $\dfrac{8}{9}$.

8. Verilen kesirlerin çarpımsal tersini bulunuz: $\dfrac{5}{12}, \dfrac{5}{9}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}$.

5. Rasyonel Sayılarla İşlemler

5.1. Rasyonel Sayılarla İşlemler

Rasyonel sayılarla toplama çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini tanımlayalım.

Rasyonel sayıları toplama

- Paydaları eşit olan kesirler nasıl toplanır?
- Paydaları farklı olan kesirler nasıl toplanır?

!

- Paydaları eşit olan kesirleri toplarken, elde edilen yeni kesrin payı payların toplamına eşit, paydasına ise ortak olan paydaların değeri yazılır, yani $\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{n}=\dfrac{m+p}{n}, n\neq 0$.
- Paydaları farklı olan kesirleri toplarken, önce kesirlerin paydaları eşitlenir, ondan sonra eşit paydalı kesirler kuralına göre toplanır.
- Rasyonel sayıların toplamı için, değişme ve birleşme özellikleri geçerlidir.

Örnek 1

a) Paydaları aynı olan iki kesri toplayalım: $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5}$. Görüldüğü gibin $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{5}$ kesirlerin toplamı paydası verilenlerin $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{5}$ kesirlerin paydalarıyla aynı olan 5 dir , payı ise $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{5}$ toplananların paylarının toplamıdır, yani $3=2+1$ dir.

b) Paydaları farklı olan iki kesri toplayalım: $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=\frac{4+5}{10}=\frac{9}{10}$

Görüldüğü gibi, önce paydaların EKOK$(2,\ 5)=10$ bulunur. Ondan sonra her kesrin paydası 10 olacak şekilde genişletilir. Sonunda, toplama işlemi eşit paydalı kesirlerin toplamına dönüşür (bu yöntem a) şıkkında açıklandı).

1 Verilen toplamı Hesaplayınız:

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$; b) $\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{12}{21}+\frac{1}{3}$; c) $1\frac{3}{5}+2\frac{4}{9}+3\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}$.

Rasyonel sayıları çıkarma

- Paydaları eşit olan kesirler nasıl çıkarılır?
- Paydaları farklı olan kesirler nasıl çıkarılır?

!

- Paydaları eşit olan kesirleri çıkarırken, elde edilen yeni kesrin payı payların farkına eşit, paydasına ise ortak olan paydaların değeri yazılır, yani $\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}, n\neq 0$.
- Paydaları farklı olan kesirleri çıkarırken, önce kesirlerin paydaları eşitlenir, ondan sonra eşit paydalı kesirler kuralına göre çıkarılır.

Örnek 2

a) Paydaları aynı olan iki kesrin farkını belirtelim: $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2-1}{5}=\frac{1}{5}$ Görüldüğü gibin $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{5}$ kesirlerin farkı, paydası verilenlerin $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{5}$ kesirlerin paydalarıyla aynı olan 5 dir , payı ise $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{5}$ çıkarılan ve çıkanın paylarının farkıdır, yani $2-1=1$ dir.

b) Paydaları farklı olan iki kesri çıkaralım: $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}$

Görüldüğü gibi, önce paydaların EKOK$(3,\ 5)=15$ bulunur. Ondan sonra her kesrin paydası 15 olacak şekilde genişletilir. Sonunda, çıkarma işlemi eşit paydalı kesirlerin farkına dönüşür (bu yöntem a) şıkkında açıklandı).

2 Verilen farkı Hesaplayınız:

a) $\frac{21}{91}-\frac{15}{91}$; b) $\frac{7}{8}-\frac{3}{6}$; c) $6\frac{3}{5}-2\frac{4}{9}$; ç) $15-2\frac{4}{9}$.

Rasyonel sayıları çarpma:

- Kesirlerin çarpımı nasıl yapılır ?

Şunu unutmayınız:

- İki kesrin çarpımı, payı payların çarpımına, paydası ise paydaların çarpımına eşit olan yeni bir kesirdir, yani

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q},\quad n,q\neq 0.$$

- Rasyonel sayıların çarpımı için değişme ve birleşme özellikleri geçerlidir, aynı zamanda çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemlerine göre de dağılma özelliği geçerlidir.

Örnek 3 a) Şu kesirlerin çarpımını hesaplayalım: $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$

Görüldüğü gibi, iki kesrin çarpımı yine bir kesirdir. Elde edilen kesrin payı, çarpanların paylarının çarpımına eşit, yani $2\bullet 1=2$ dir. paydası ise çarpılan kesirlerin paylarının çarpımına eşittir, yani $5\bullet 3=15$ dir.

b) Aynı kuralı izleyerek üç kesrin çarpımını da belirtiyoruz: $\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}=\frac{2}{45}$. Fark edildiği gibi, kesirlerin çarpımına geçmeden önce, mümkünse kesirlerde kısaltma yapılabilir.

3 Hesaplayınız: a) $3\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{5}\cdot 21$; c) $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{5}{21}$.

Rasyonel sayıları bölme:

- İki kesrin çarpımı nasıl yapılır ?

Şunu unutmayınız:

❖ İki kesrin bölümünü hesaplamak için, bölünen bölenin çarpımsal tersiyle çarpılır, yani,

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}, \quad n,p,q\neq 0\,.$$

❖ $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}$ bölümü $\dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}$ biçiminde de yazılabilir ve buna iki katlı kesir de denilir.

Bu gibi kesirleri basit kesre şu kurala göre dönüştürülür: $\dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}=\dfrac{m\cdot q}{n\cdot p}$.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- $\dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}$ iki katlı kesirde m ve q nasıl adlandırılır, n ve p ise nasıl?
- $\dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}$ iki katlı kesirde kısaltma nasıl yapılabilir?

Örnek 4

a) Şu iki kesrin bölümünü hesaplayalım: $\frac{2}{5}:\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$.

Fark edildiği gibi, $\frac{2}{5}$ kesrini $\frac{1}{3}$ kesriyle bölerken, $\frac{2}{5}$ bölüneni $\frac{1}{3}$ bölenin çarpımsal tersiyle, yani $\frac{3}{1}$ ile çarpılır. Buna göre iki kesrin bölümü, iki kesrin çarpımına dönüşür, o halde çarpım örnek 3'te gösterildiği gibi yapılır.

b) $\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{4}$ kesirlerin bölümünü iki katlı kesir biçiminde göstererek yukarda gösterilen kurala göre hesaplayalım: $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{1\cdot \cancel{4}}{\cancel{2}\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$. Burada görüldüğü gibi, elde edilen kesrin payı, iki katlı kesrin 1 ve 4 dış terimlerinin çarpımıdır, paydası ise iki katlı kesrin 2 ve 3 iç terimlerinin çarpımıdır. Çarpma işlemini yaparken kısaltma işlemi de yapılır.

4 Hesaplayınız: a) $3\frac{2}{5}:2\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{5}:21$; c) $3\frac{2}{5}-2\frac{1}{3}:3\frac{5}{21}$; ç) $\dfrac{1\frac{2}{5}\cdot 2\frac{3}{4}}{1\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$.

5.2. Problemlerin çözümü

Birkaç pratik problem çözelim.

Örnek 5 Bir havuz iki borudan dolar. Borulardan biriyle havuz 5 saatte dolar, ikincisi ile 9 saatte, üçüncüsü 3 saatte ve dördüncüsü 7 saatte havuzu doldurabilir. Aynı anda dört boru açık olduğu durumda 1 saatte havuzun ne kadar kısmı dolacaktır?

Birinci boru 1 saatte havuzun $\frac{1}{5}$ ini, ikinci boru 1 saatte havuzun $\frac{1}{9}$ ini, üçüncü boru 1 saatte havuzun $\frac{1}{3}$ ini ve dördüncü boru 1 saatte havuzun $\frac{1}{7}$ ini dolduracaktır. Her biri beraber açık olduğunda 1 saatte havuz $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{63+35+105+45}{315}=\frac{248}{315}$ kısmını dolduracaktır.

Örnek 6 İki çalışan, görevlerini doğru yapmadıklarından ötürü cezalandırılmışlar. Birinci çalışana $12\ 000$ denar olan maaşının $\frac{2}{3}$ ‘ ünü, ikinci çalışana $15\ 000$ denar olan maaşının $\frac{2}{5}$’ ini keserek ceza verilmiştir. İlerdeki ayda, hangi çalışanın daha fazla harcayacak parası kalmıştır?

Birinci çalışan o ayda aldığı maaşı $\frac{2}{3}\cdot 12000 = 2\cdot 4000 = 8000$ denardır. İkinci çalışanın aldığı maaş $\frac{2}{5}\cdot 15000 = 2\cdot 3000 = 6000$ denardır. Buna göre o ay birinci işçinin maaşı daha fazladır.

Örnek 7 Bir aile kendi arabalarıyla bir geziye çıkmış. Birinci gün, gidilecek olan yolun $\frac{2}{7}$ 'sini, ikinci gün yolun $\frac{3}{5}$ 'ini, üçüncü gün ise yolun kalan 120 km'sini geçmişler. Araba, her 10 km de $1\frac{2}{3}$ litre yakıt harcadığına göre, kaç litre yakıt harcanmıştır?

Üçüncü gün 120 km yol geçildiğine göre, bu yolun $1-(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}) = 1-\frac{10+21}{35} = 1-\frac{31}{35} = \frac{4}{35}$ kısmıdır. Bütün yolun uzunluğu $120\cdot\frac{35}{4} = 1050$ dir. Geçilen 1050 km yol için bu aile $1\frac{2}{3}$ (1050:10)= $\frac{5}{3}\cdot 105 = 175$ litre yakıt harcamıştır.

Örnek 8 Yapılan bir iş için, üç işçiye $30\ 000$ denar para şu şekilde ödenmiştir: Birinci işçi toplam paranın $\frac{1}{5}$ ini, ikincisi birinci işçinin aldığı paranın 2 katını ve üçüncüsü kalan parayı almıştır. Bitirilen iş için her işçi kaçar denar almıştır?

Birinci işçi $\frac{1}{5}\cdot 30000 = 6000$ denar, ikinci işçi ise $2\cdot 6000 = 12000$. denar almıştır.

Üçüncü işçi 30000 − (6000 + 12000) = 30000 −18000 = 12000 denar almıştır.

Kendi başına çalışmak için alıştırmalar

1. Verilen işlemler yapılsın:

a) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{14}+\frac{3}{4}:\frac{9}{16}-\frac{1}{2}$; b) $(3\frac{1}{3}-\frac{1}{5}):(1\frac{1}{6}+2\frac{3}{10})$; c) $\dfrac{2-1\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}$;

ç) $\dfrac{5+1\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{2\frac{2}{3}-\frac{1}{5}:\frac{3}{10}}$; d) $\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{7}{15}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}-2\frac{1}{3}+\frac{1}{15}}:\dfrac{3+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}$; e) $(\dfrac{\frac{3}{7}+\frac{3}{14}-\frac{1}{21}}{1\frac{1}{2}-1\frac{2}{5}}-\frac{2}{3}-\frac{6}{7})\cdot\dfrac{1}{4+\frac{3}{7}}$.

2. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}$ herhangi rasyonel sayılar olsun. Şu eşitlikleri ispatlayınız:

a) $(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{m}{n}=\frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{m}{n})$; b) $(\frac{a}{b}-\frac{c}{d})\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}-\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$.

3. Belli bir miktar para 3 kişiye ayrılıyor. Birinci kişi paranın $\frac{1}{5}$ ini, ikincisi paranın $\frac{3}{7}$ ünü, üçüncü kişi ise 13000 denar almıştır. Paranın miktarı ne kadarmış ve birinci ve ikinci kişi ne kadar para almıştır?

4. Bir sınıfta 5 öğrenci sınıfta kalıyor, bu ise sınıf mevcudunun $\frac{1}{6}$ idir. Sınıfta kaç öğrenci varmış?

5. Bir havuz üç boruyla dolar, bir boruyla ise boşalır. Birinci boru havuzu 9 saatte, ikinci boru 5 saatte, üçüncüsüyle 7 saatte dolar, dördüncüsüyle ise havuz 11 saatte boşalır. Tüm borular aynı anda açıldığında havuz 1 saatte ne kadar dolacaktır?

6. Onur çok iyi bir sporcudur. Bu nedenle, gün boyunca her gün özel bir plana göre çalışması gerekir. Bununla ilgili 24 saatlik bir günlük çalışma plan yapmış: Günün $\frac{1}{4}$ ini uykuya, $\frac{1}{5}$ ini koşmağa, $\frac{1}{9}$ ini salon egzersizlerine, $\frac{1}{6}$ ini germe egzersizine ve 1 saat istirahat ve yemek yemeye ayırmıştır. Onurun yaptığı bu çalışma programı mümkün müdür?

7. Şaban, yazlık villasında bir havuz yapmıştır. Havuz dikdörtgenler prizması şeklinde olup boyutları $6\frac{1}{5}m, 12\frac{1}{2}m, 2\frac{2}{5}m$ dir. Havuzu deniz suyuyla $1\frac{3}{5}m$ ye kadar yükseklikte deniz suyuyla doldurmuştur. Deniz suyunda $\%1\frac{1}{8}$ tuz vardır. Havuz kaç litre su sığar? Şaban'ın havuzunda kaç litre su vardır? Bu havuzda kaç kg tuz vardır?

8. $\frac{1}{5}$ ve 2 sayılarının çarpımsal terslerinin farkını, onların toplamıyla bölünüz.

6. Ondalık Kesirler (Sayılar). Ondalık Kesirlerle İşlemler

6.1. Ondalık kesirler

Paydaları ondalık birimi olan $\frac{1}{10}, \frac{33}{100}, \frac{1}{1000}$ gibi kesirlere **ondalık kesirler** deriz. Bunları ondalık sayı biçiminde yazıyoruz, $\frac{1}{10}=0,1; \frac{33}{100}=0,33; \frac{1}{1000}=0,001$. $0,3;$ $1,25;$ $0,123$ ondalık sayıları da $0,3=\frac{3}{10}; 1,25=1\frac{25}{100}; 0,123=\frac{123}{1000}$. ondalık kesirler biçiminde gösterilir.

$\frac{1}{2}, \frac{33}{25}, \frac{1}{5}$ kesirlerini ondalık sayı biçiminde göstermek için, önce onları ondalık kesir biçiminde dönüştürmemiz gerekir, ondan sonra ondalık sayı gibi yazabiliriz: $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0,5; \frac{33}{25}=\frac{132}{100}=1,32; \frac{1}{5}=\frac{2}{10}=0,2$.

$5,25$ ondalık sayısının değeri $5,250$ ile, $5,2500;$ $5,25000$ ile aynıdır.

Ondalık kesirlerden elde edilen ondalık sayıların ondalık basamakları sonludur.

1 Verilen kesirleri ondalık sayı biçiminde gösteriniz: $\frac{13}{20}, \frac{32}{125}, \frac{85}{100}, \frac{7}{50}$.

2 Verilen ondalık sayıları kesir biçiminde gösteriniz: $0,52; 5,125; 4,8; 0,45$.

!

- **Ondalık kesirler,** paydası onluk birimi olan kesirlerdir.
- **Ondalık sayı**, paydasız yazılan ondalık kesirdir; bu şekilde yazarken ondalık virgülünden sonra paydada sıfırların olduğu kadar rakamların olmasına dikkat etmeliyiz. Bu gibi ondalık sayılar **sonlu ondalık sayılardır.**
- Ondalık sayının sağ tarafına ne kadar sıfır yazılırsa yazılsın sayının değeri değişmez.
- Paydası herhangi bir onluk birimi olan her kesri, ondalık kesir biçiminde dönüştürebiliriz, ondan sonra onu ondalık sayı biçiminde yazabiliriz.

Verilen kesir ondalık kesir değilse, kesrin payını paydasına bölmekle kesrin ondalık sayıya dönüştürülmesi mümkündür.

Örnek 1 $\frac{1}{3}$ kesri ondalık kesre dönüşemez, çünkü 3 sayısı hiçbir onluk biriminin böleni değildir. Halbuki, payını paydasıyla bölersek sonsuz ondalık basamakları olan ondalık sayı elde edeceğiz, $\frac{1}{3}=1:3=0,3333...$.

$\frac{9}{14},\frac{1}{11},\frac{1}{6},\frac{1}{7}$ kesirleri için de karşılıklı olarak şu sonsuz ondalık sayılar elde edilir:

$\frac{9}{14}=9:14=0,6428571428571...$, $\frac{1}{11}=1:11=0,090909...$, $\frac{1}{6}=1:6=0,166666...$,

$\frac{1}{7}=1:7=0,142857142857...$

Verilen örneklerde şunu fark edebiliriz: Elde edilen tüm ondalık sayılar sosuz olduklarına rağmen bazı sayılar ya da birer grup sayı devamlı tekrarlanır. Bu gibi ondalık sayılara **devirli ondalık sayılar** denir. Tekrarlanan sayıya ya da sayı grubuna periyot denir. Bu gibi ondalık sayıları şu şekilde yazıyoruz:

$0,3333...=0,(3)$; $0,6428571428571...=0,6(428571)$; $0,090909...=0,(09)$;

$0,142857142857...=0,(142857)$.

!

❖ Her rasyonel sayı, sonlu ya da sonsuz ondalık basamaklı ondalık sayı biçiminde gösterilebilir.

3 Verilen rasyonel sayıları ondalık sayı biçiminde gösteriniz: $\frac{9}{4},\frac{4}{5},\frac{2}{9},\frac{5}{22}$.

Sonsuz devirli ondalık sayıları, kesir biçiminde, yani rasyonel sayı şeklinde yazabiliriz.

Örnek 2 2,(5) ve 0,1(23) ondalık sayılarını kesir biçiminde şu şekilde dönüştüreceğiz:

$$2,(5)=2,5555....$$
$$x=2,55555..../\cdot 10$$
$$10x=25,555...$$
$$\underline{10x-x=25,555...-2,555...}$$
$$9x=23$$

$$0,1(23)=0,1232323...$$
$$x=0,1232323.../\cdot 10$$
$$10x=1,232323..../\cdot 100$$
$$1000x=123,2323....$$
$$\underline{1000x-10x=123,2323...-1,2323...}$$
$$990x=122$$

$x = \frac{23}{9} = 2\frac{5}{9}$ $\qquad$ $x = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}$

4 Verilen devirli ondalık sayıları kesir biçiminde gösteriniz:
$3,12(5); 0,1(3);\ 3,(123).$

6.2. Ondalık Sayılarla İşlemler

Ondalık sayıların toplamını ve farkını hesaplamak için, tam sayılı kısımlar alt alta gelecek şekilde yazılmalıdır. Bu sayede virgüller de alt alta gelir ve bu şekilde yazıldıktan sonra, tıpkı doğal sayılarla yapıldığı gibi toplama veya çıkarmayı en sağda olan rakamlarla başlıyor ve sola doğru alt alta gelen rakamlarla devam ediyoruz.

Örnek 3 Verilen $8,25;\ 0,125;\ 12,5$ ondalık sayıları toplayalım.

$$\begin{array}{r} 8,25 \\ 0,125 \\ +12,5 \\ \hline 20,875 \end{array}$$

$2,1$ ve $0,124$ ondalık sayılarını çıkaralım.

$$\begin{array}{r} 2,1 \\ -\ 0,124 \\ \hline 1,976 \end{array}$$

İki ondalık sayının çarpımı, doğal sayıların çarpımıyla aynıdır. Bu durumda çarpma işleminde virgül yokmuş gibi sayılar çarpılır. İşlem sonunda çarpılan sayıların virgülden sonraki basamak sayılarının toplamı kadar çıkan sonuç sağdan sola virgül ile ayrılır.

Örnek 4 $2,56$ ve $3,2$ sayılarını çarpalım.

$$\begin{array}{r} 2,56\cdot 3,2 \\ \hline 512 \\ +768 \\ \hline 8,192 \end{array}$$

Ondalık sayılarda bölme işleminin yapılması için bölen tam sayı olmalıdır. Bu şekilde bölme işlemi ondalık sayıyı tam sayıyla bölme işlemine dönüşür. Bunu yaparken bölünenin tam kısmı bölündükten sonra bölümde virgül yazılır ve bölünenin ondalık kısmıyla bölmeye devam edilir.

Bölünen ve bölen de her ikisi ondalık sayı olduğu durumda, bölen virgülden kurtarılır. Bölen virgülden kurtarılır iken hangi onluk birimiyle çarpılmış ise bölünen de aynı onluk birimiyle çarpılır. Sonrasında ondalık sayıyı tam sayı ile normal bölme işlemi yapılır.

Örnek 5 Verilen bölümleri hesaplayalım: : a) 2,52 : 2; b) 2,52 : 0,2.

a)

$$2,52:2=1,26$$
$$\begin{array}{l} -2 \\ \hline =5 \\ -4 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline = \end{array}$$

b)

$$2,52:0,2=(2,52\cdot 10):\ (0,2\cdot 10)=25,2:2=12,6$$
$$\begin{array}{r} -24 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

5 Hesaplayınız:

a) $(76,48-12,2):0,4$; b) $7,64+(16,258-12,2)\cdot 0,21$.

Kendi başına çalışmak için alıştırmalar

1. Verilen kesirleri ondalık kesirler gibi yazınız: $\frac{2}{3}, \frac{7}{8}, 1\frac{5}{7}, -3\frac{7}{10}$ Bunlardan hangileri sonlu ondalık sayı, hangileri ise sonsuz devirli ondalık sayıdır?
2. Verilen ondalık sayıları en sade biçimde kesirler biçiminde gösteriniz: 1,25; 0,55; 0,2(3); 1,(5).
3. Verilen işlemleri yapınız:
   a) $(22,5-1,23+0,123)\cdot 1,2$; b) $(36,73-11,42):0,25$; c) $(45,3+3,5\cdot 14,395):0,5$.
4. Verilen işlemleri yapınız:
   a) $\frac{0,8}{4,5}\cdot 1,8-(1,2+0,06):0,18$; b) $\frac{(2,7-0,9)\cdot 1\frac{1}{2}}{(5,7+2,3):0,4}+0,001:\frac{1}{2}-5,75$.
5. Ramiz bisikletiyle saatte 20,25 km, Merita satte 15,74 km ve Slavçe saatte 21,43 km yol katetmiştir. Her biri 2,23 saat bisiklet sürerek kaçar km yol katetecektir? 0,8 saatte hepsi beraber toplam ne kadar yol katetecekler?

6. Ayşe nine $1,4$ kg taze çilekten 1 kg reçel elde etmiş, Nine Venka ise $1,2$ kg taze çilekten 1 kg reçel elde etmiştir. Her biri $2,75$ kg reçel elde etmek için daha ne kadar taze çilek satın almalıdır?

7. Reel (Gerçek) Sayılar

7.1. Reel Sayılar

Rasyonel sayılar kümesini tanımlayarak inceledikten sonra şu tespitleri yapabiliriz:

- Herhangi iki rasyonel sayı arasında rasyonel sayı vardır, yani rasyonel sayılar kümesi sıralı yoğun kümedir.
- Rasyonel sayıları sayı doğrusu üzerinde gösterebiliriz.
- Pozitif bir a rasyonel sayısının karekökü, sembolik şekilde $\sqrt{a}$, ile işaret edilir, öyle ki $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow a = x^2$ eşitliği sağlanır.

$x^2 = a$ denkleminin çözümüne ait incelemeyi aşağıda verilmiş olan örnek 1 ile yapacağız.

Örnek 1

$x^2=9$ denkleminin rasyonel sayılar kümesinde çözümü vardır, yani $x = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Q}$

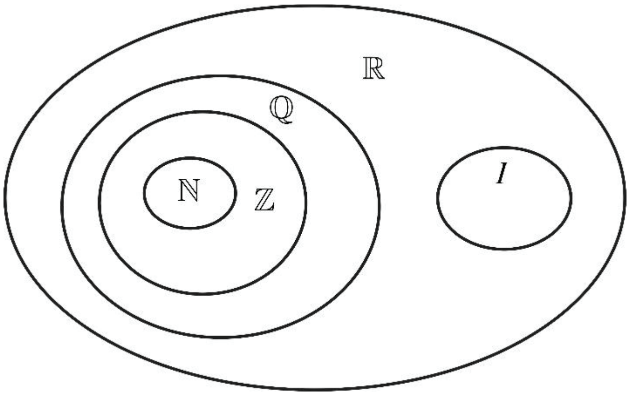
Halbuki, $x^2 = 3$ denkleminin rasyonel sayılar kümesinde çözümü yoktur, $x = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Bu gibi denklemlerin çözümünü belirtmek için, bu sayıları içeren yeni kümeye ihtiyaç duyulmaktadır. Bu kümeye **irrasyonel sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{J}$ ile işaret edilir. Hesap makinesi kullanarak $\sqrt{3} = 1,7320508...$ elde edilir. Bu şekilde devirli olmayan sonsuz ondalık basamaklı bir ondalık sayı elde edilir. Bu gibi sayılar $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, -\sqrt{2}, ...$ dir.

!

- **İrrasyonel sayılar** devirli olmayan sosuz ondalık sayılardır.
- Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimi **reel sayılar kümesini** oluşturuyorlar ve $\mathbb{R}$ ile işaret edilir. Bu kümelere $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ve $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$. geçerlidir.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I}$ kümelerini Ven diyagramıyla şu şekilde gösterebiliriz:



Düşününüz!

- Hangi sayı büyüktür $\sqrt{5}$ yoksa $\frac{7}{3}$?

Bu gibi iki reel sayıyı karşılaştırmak için, onlara karşılık gelen ondalık açılımlarını bulmalıyız: $\sqrt{5} = 2.23606797...$ ve $\frac{7}{3} = 2.333333...$. Demek ki, $\sqrt{5} < \frac{7}{3}$ elde edilir.

1 Verilen reel sayıları büyüklüklerine göre sıralayınız: $\sqrt{5}, -\sqrt{2}, 0, -\frac{5}{6}, \frac{1}{10}$.

Demek ki, reel sayılar kümesinin elemanlarını sıralayabiliriz, yani herhangi iki reel sayı a ve b karşılaştırılabilir ve bu durumda $a < b \vee a > b \vee a = b$. dir.

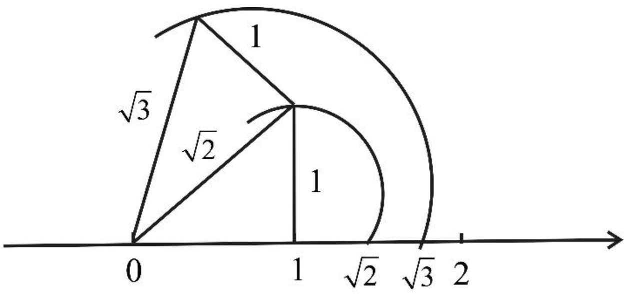
Rasyonel sayıları sayı ekseninde gösterilebildiğini artık biliyorsunuz, fakat irrasyonel sayılar da sayı ekseninde gösterilebilir. Bu gösterim sayının geometrik çizimi yardımıyla yapılabilir.

Örnek 2 Aşağıda izlenen aşamalarla $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ sayılarını sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

1. İrrasyonel sayıyı $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$; biçiminde gösteriyoruz.
2. Pisagor teoreminden yararlanarak şu sonuca varıyoruz: Katetleri 1 birim olan bir ikizkenar dik üçgen çizersek elde edilecek dik üçgenin hipotenüsü $\sqrt{2}$ birim olacaktır.
3. Sayı ekseni üzerinde, katetleri 1 birim ve dik köşesi 1 sayısını işaret eden noktada olmak üzere ikizkenar dik üçgen çizeriz.

4. Çizilen üçgenin hipotenüsünün uzunluğu $\sqrt{2}$ birimdir ve onu pergel yardımıyla O noktasından sağa doğru sayı doğrusu üzerinde göçürüyoruz. Bu şekilde $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısını gösteren noktayı elde ediyoruz;

için, $\sqrt{3}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}$ gösteriminden yararlanılır. Bu irrasyonel sayının geometrik çizimini yapmak için, katetlerinden biri 1 birim, diğeri ise $\sqrt{2}$ birim olan dik üçgen çizilmelidir. Bu dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu $\sqrt{3}$ birimdir. $\sqrt{3}$ sayısını sayı doğrusu üzerinde çizmek için önce $\sqrt{2}$ çizilmelidir. $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$, daha da $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ irrasyonel sayıların geometrik çizimi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Not 1: İrrasyonel sayıyı belirtmek için, daima dik üçgenin hipotenüsü olacak diye bir zorunluluk yoktur. Dik üçgenin katetinin uzunluğu olarak da elde edilebilir. Buna örnek olarak $\sqrt{8}=\sqrt{3^2-1^2}$ geometrik çizimini gösterebiliriz.

Demek oluyor ki, irrasyonel sayı bir şekilde sayı doğrusu üzerinde daima gösterilebilir. Sayı eksenine **reel eksen** denir.

!

Reel eksenin herhangi noktasına tam bir reel sayı karşılık gelir ve tersine, her reel sayıya reel eksen üzerinde tam bir nokta karşılık gelir.

2 Reel eksen üzerinde $\sqrt{5}$ irrasyonel sayısını gösteriniz.

- Reel sayının mutlak değeri, tam sayının mutlak değeri gibi tanımlanır mı?

Bu sorunun cevabı evettir, yani $m \in \mathbb{R}$ için m sayısının mutlak değeri şu şekilde tanımlanır:

$$|m| = \begin{cases} m, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -m, & m < 0 \end{cases}.$$

3 Hesaplayınız: a) $\left|-\frac{1}{2}\right|$; b) $|2,35|$; c) $|-53,1|$.

Not 2: Mutlak değerlerin tam sayılara geçerli olan özellikleri, reel sayıların mutlak değeri için de geçerlidir.

- Birbirinin tersi olan reel sayıların mutlak değeri aynıdır, yani $m \in \mathbb{R}$ için $|-m| = |m|$ dir.
- Her $m \in \mathbb{R}$, $m + (-m) = -m + m = 0$ geçerlidir.
- Her $m, n \in \mathbb{R}$. için, $|m \cdot n| = |m| \cdot |n|$, $|m + n| \leq |m| + |n|$, $|m - n| = |n - m|$, geçerlidir.

7.2. Aralıklar

Reel sayılarda bir eşitsizliğin çözümünü ararken, aralık kavramının tanımlanmasına ihtiyaç duyulduğunu görüyoruz.

- $x + 3 > 0$, $2 - x \leq 0$, $x - 5 \geq 3$, $x \in \mathbb{R}$ eşitsizliklerin çözümleri, reel sayıların birer alt kümesidir. Bu altkümelere aralıklar denir.

Aralıklar için şunları diyebiliriz:

- Aralıklar, $a < x < b, a \leq x < b, a < x \leq b, a \leq x \leq b$, eşitsizliklerini sağlayan reel sayıların altkümesidir. a ve b reel sayıları **aralığın uçlarıdır**.

Bu aralıklar genellikle şu şekilde de yazılıyorlar:

- $a < x < b$, daha kısa (a,b), ya da $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ şeklinde gösterilir ve bunlara **yarı açık aralıklar** denir.
- Yarı açık aralıklarda aralığın sadece bir sınırı aralığa aittir. $a \leq x < b$ aralığında a sayısı aralığa ait, b ise aralığa ait değildir; $a < x \leq b$ aralığında ise a ait değil, b aittir.

Not 3: $a < x < b$, iki kat eşitsizliği, $x > a \wedge x < b$ eşitsizliklerin tümel evetlemesidir.

Aralıkların sonlu olması zorunlu değildir.

Sonsuz aralıklar da vardır:

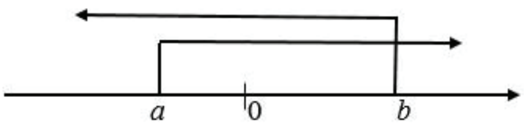
$(a,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>a\}$,

$[a,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\geq a\}$,

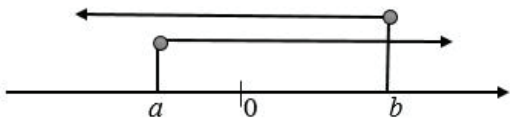
$(-\infty,b)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x<b\}$,

$(-\infty,b]=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\leq b\}$.

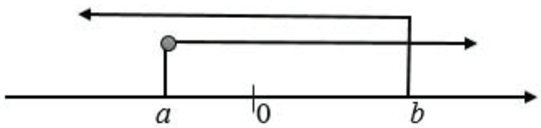
Aralıklar sayı doğrusu üzerinde de şu şekilde gösterilir:



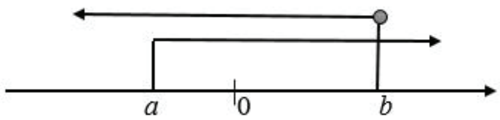
$x\in(a,b)$



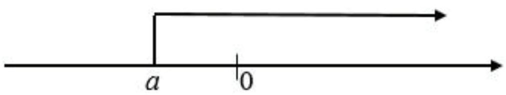
$x\in[a,b]$



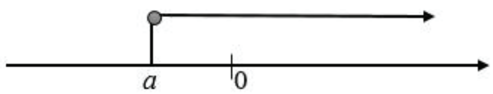
$x\in[a,b)$



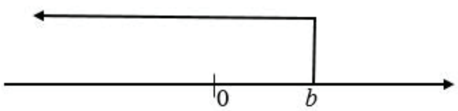
$x\in(a,b]$



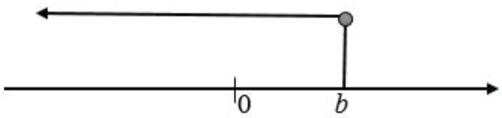
$x\in(a,+\infty)$



$x\in[a,+\infty)$

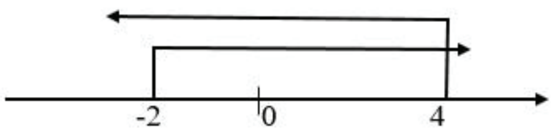


$x\in(-\infty,b)$



$x\in(-\infty,b]$

Örnek 3 Verilen sayı doğrusunda hangi aralık gösterilmiştir.



Sayı doğrusu üzerinde (-2, 4) aralığı gösterilmiştir.

4 Sayı doğrusu üzerinde şu aralıkları gösteriniz:

$[0,\frac{1}{2}],[-3,2),(\frac{1}{3},5],(-\infty,5],(2,+\infty)$.

7.3. Problemlerin Çözümü

Birkaç problem çözelim.

Örnek 4 $|a|=|b|$ olduğu durumda $a,b\in\mathbb{R}$ için $a=b$ gerekir mi?

$|a|=|b|$ ise, $a=b$ eşitliğinin doğru olması mecburi değildir, çünkü bu sayılar birbirinin tersi olabilir. Örnek, $a=5, b=-5$.

Örnek 5 $a\cdot b>0$. olmak için, $a,b\in\mathbb{R}$ nasıl olmalıdır?

a, b reel sayıları aynı işaretli olmalıdır, yani $a,b>0\vee a,b<0$.

Örnek 6 İki kent arasındaki uzaklığı, kilometre olarak aşağıdaki sayılardan hangisi ile ölçülebilir: $20,52$; -50; -75? Cevabınızı açıklayınız.

$20,52$ km. Uzaklık daima pozitif sayıdır.

Örnek 7 Slavko döşeme fayansları almak için, satıcıya dönerek: -5 metre kare fayans almak istiyorum, siz hangilerini tercih ediyorsunuz?” Satıcı Slavko’ya gülümsemiş. Satıcı acaba Slavko’ya neden gülümsemiştir?

Alan $5m^2$ (oku: 5 metre kare) daima pozitif sayı ile ölçülür ve ifade edilir.

Kendi başına çalışmak için alıştırmalar

1. Verilen irrasyonel sayıları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz: $\sqrt{11},-\sqrt{11},\sqrt{7},-\sqrt{12}$.
2. Hesaplayınız: a) $|-5,35+2,34|-\left|\frac{1}{2}-2\right|$; b) $|2,35\cdot 3,2-6,34|+|6,2:2|$.
3. Verilen aralıkları daha kısa şekilde yazınız: $\{x\mid x\in\mathbb{R},7<x<9\}$, $\{x\mid x\in\mathbb{R},0<x\leq 8\}$, $\{x\mid x\in\mathbb{R},x<5\}$, $\{x\mid x\in\mathbb{R},x\geq -3\}$.
4. Verilen aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz:
   a) $[-2,5]\cap(-3,2]$; b) $[-2,+\infty)\cap(-5,5)$; c) $[-2,7)\cup(-5,5)$.

5. Şu iddiaların doğruluğunu yoklayınız:

a) $|x+y| \leq |x|+|y|$; b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ için $x=-\frac{5}{8}; y=2,52$.

6. Bir çiftçi, çuvalında ne kadar buğday olduğunu tahmin ediyor. O kestirmeyi yapıyor fakat sonucu -8 kg, yoksa 8 kg olarak ifade edilmesinde tereddüt ediyor. Hangisi doğrudur? Cevabı açıklayınız.

7. Bir dairenin çevresi ve alanının karelerinin oranını bulunuz. Nasıl sayı elde ettiniz?

8. Modüler birime ait tekrarlama alıştırmaları

1. Hesaplayınız: a) $(125-105)\cdot 11+256:4$; b) $-5\cdot\left(-6+5\cdot(-4)\right)+(-5):5$;

c) $\dfrac{15-1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{1\frac{2}{5}+\frac{1}{5}:\frac{1}{15}}$; ç) $2,56-2,5\cdot\left(1,27+6,35 : (-0,5)\right)$.

2. 250, 210, 220 sayılarının EKOK ve EBOB'ini belirtiniz.

3. En küçüğünden başlayarak verilen reel sayıları büyüklüklerine göre sıralayınız:
$\sqrt{7}; -\sqrt{11}; \frac{1}{7}; -\frac{1}{5}; 3,555; -2,5(23)$.

4. 2,12(5) devirli ondalık sayısını kesir biçiminde gösteriniz.

5. Verilen kesirleri ondalık sayı biçiminde gösteriniz: $\frac{2}{7}, -\frac{1}{5}, \frac{5}{11}, -\frac{9}{20}$. Bunlardan hangileri sonlu, hangileri ise sonsuzdur?

6. Verlen aralıkları belirtiniz: a) $(-7,10]\cup(-5,12)$; b) $(-3,+\infty)\cap[-1,2]$.

7. Evli bir çift aldıkları aylık maaşlarını getiriyorlar. Hanım eve gelmeden önce, 25 000 denar aldığı maaşından 3000 denar entari, 500 denarı ise markette harcamış. Eşi de eve gelmeden önce 22 000 denar aldığı maaşın 850 denarını pazarda ve arkadaşıyla bir kafeteryada kahve ve bira içerek 150 denar harcamış. Eşler eve kaç para getirmiştir?

8. Bir çiftçi tarlasını iki sıradan tel ile sarmak için tel satın almalıdır. Tarla dikdörtgen biçiminde olup, genişliği 25,8 metre, uzunluğu ise genişliğinin yarısı kadarmış. Çiftçi kaç metre tel satın alması gerekir?

9. Bir otobüs istasyonunda üç otobüs sabah saat 6 da aynı anda farklı yerlere gitmek üzere hareket etmiştir. Birinci otobüs 1 saat ve 5 dakika sonra istasyona dönmüş ve 10 dakika sonra yine hareket etmiştir. İkincisi 56 dakika sonra dönmüş ve 4 dakika sonra yine hareket etmiştir. Üçüncüsü de 48 dakika sonra dönmüş ve 2 dakika bekledikten sonra hareket etmiştir. Her seferde bu şekilde hareket edildiği durumda otobüsler ne zaman en kısa zamanda yine aynı anda hareket edecekler?

10. Adamın biri arabasıyla birinci gün gideceği yolun $\frac{2}{5}$ sini, ikinci gün yolun $\frac{1}{7}$ ini ve üçüncü gün kalan 260 km yolu geçmiştir. Araba her 10 km de $1\frac{1}{3}$ litre yakıt harcadığına göre kaç litre yakıt harcamıştır? Bir litre yakıt 66 denar olduğuna göre, adam kaç para harcamıştır?

3

CEBİRSEL RASYONEL İFADELER

MODÜLER BİRİMİN HEDEFLERİ

Bu modüler birimini incelemekle öğrenci şu kazanımları elde etmelidir:

- Aynı tabanlı kuvvetleri ya da aynı üslü kuvvetleri çarpmalıdır ve bölmelidir;
- Kuvvetin kuvvetini belirtmelidir;
- Tek terimliyi bilmeyi ve tanımalıdır, benzer terimleri tanımalı ve tek terimlerle işlemleri yapmalıdır;
- Polinomu tanımlayabilir ve onlarla işlemleri yapabilir;
- Binomun karesini, kareler farkı, binomun küpü, küplerin toplamı ve farkı formüllerinden yararlanılmasını bilmelidir;
- Polinomun çarpanlara ayrılmasını;
- Cebirsel kesirlerin tanımını ve cebirsel kesirlerle işlemlerin yapılmasını.

MODÜLER BİRİM 3’ ÜN İÇİNDEKİLERİ

1. Üslü İfadeler. Üslü İfadelerin çarpımı, bölümü ve kuvveti

Eş toplananlardan oluşan toplamı incelerken, bizi çarpma işlemine götürmüştü. Örnek

$$\underbrace{2+2+2+2+2}_{5\text{-}defa}=5\cdot 2\,.$$

○ Halbuki, eş çarpanlardan oluşan çarpımı daha kısa olarak nasıl yazacağız?

Örnek 1 $\underbrace{4\cdot 4\cdot 4}_{3\text{-}defa}=64$ çarpımını inceleyelim. $4\cdot 4\cdot 4$ çarpımı $4\cdot 4\cdot 4=4^3$ biçiminde yazılabilir.

4^3 ifadesi $4\cdot 4\cdot 4$ çarpımının **kısa yazılışıdır** denir.

Bu gibi eş çarpanlardan oluşan kısa yazılışa **üslü ifade** (**kuvvet**) denir.

4^3 iifadesinde, 4 sayısına **kuvvetin tabanı**, 3 sayısına **kuvvetin derecesi** denir.

Kuvvetin tabanı, çarpımda tekrarlanan çarpandır, kuvvetin derecesi ise, üslü ifadede taban olarak verilen çarpanın kaç defa çarpıldığını "gösteren" sayıdır.

!

❖ Her biri bir a reel sayısına eşit olan n tane $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-}defa}$,çarpanın çarpımını kısaca a^n biçiminde yazıyoruz.

$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-}defa}=a^n,\ a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}.$

❖ a^n üslü ifadesi n tane a çarpanın çarpımının kısa yazılışıdır.

❖ a^n üslü ifadesinde *a* sayısına **kuvvetin tabanı**, n sayısına da kuvvetin **üssü** denir.

1.1. Üssü tam sayı olan kuvvet

!

❖ Her a reel sayısı a^1 biçiminde yazılabilir.

❖ Tanım gereğince a^1 = 1 kabul edilir.

Bir kuvvetin derecesinin daima pozitif olması zorunlu değildir. Üslü ifade, kuvvetin derecesi negatif tam sayı olacak şekilde tanımlanabilir.

!

❖ Kuvvetin üssü negatif tam sayı olduğu durumda

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Yukarıdaki tanıma göre, aşağıda verilen alıştırmaları çözmeye çalışınız:

1 Şu çarpımları kuvvet biçiminde gösteriniz:

a) $3\cdot3\cdot5\cdot6$;   b) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$;   c) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$;

ç) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$;   d) $(x-2y)\cdot(x-2y)\cdot(x-2y)$.

- Ne fark ediyorsunuz?

Birinci alıştırma a) şıkkında verilen çarpımda farklı çarpanlar olduğundan, çarpım bir kuvvet biçiminde gösterilemez.

2 Verilen kuvvetleri eş çarpanların çarpımı biçiminde gösteriniz:

a) $(-5)^5$;   b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$;   c) $(a-5)^4$;   ç) $\left(-\frac{1}{10}\right)^1$.

Üslü ifadeler hakkında inceleme yapılırken, eş çarpanlar “rolünde” negatif reel sayılar da olduğunu fark etmeliyiz. Tabanı negatif reel sayı olan üslü ifadenin işaret ile ilgili neleri bilmeliyiz?

Bunu daha kolay tespit etmek için (-1) reel sayısının şu kuvvetlerine bakalım.

$(-1)^1 = (-1)$, $(-1)^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$, $(-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = (-1)$,

$(-1)^4 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$, vb.

Görüldüğü gibi, (-1) sayısı kendi kendisiyle çift sayı defa çarpılırsa değeri 1, yani ön işareti + olur, tek sayı defa çarpılırsa değeri (-1), yani ön işareti (-) olur.

Çift sayıları genel olarak $2k$ ile, tek sayıları ise genellikle $2k - 1$ ile işaret edildiğini göz önünde bulundurarak, yukarıdaki incelemeleri simgelerle şu şekilde ifade edebiliriz:

Her $k \in \mathbb{N}$. için, $(-1)^{2k} = 1$ ve $(-1)^{2k-1} = -1$ dir.

Şu ödevi çözünüz:

3 Hesaplayınız:

a) $(-1)^{2020}$ b) $(-1)^{2021}$

Tabanları aynı olan kuvvetlerde, çarpma, bölme, kuvvet işlemleri gibi birçok işlemler tanımlanabilir.

1.2. Aynı Tabanlı Kuvvetlerin Çarpımı

a herhangi reel sayı, $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere a^n ve a^m kuvvetlerini çarpalım.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m} = a^{m+n}.$$

!

- Tabanları aynı olan üslü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken taban aynen yazılır, üsler toplanıp tabanın üssü olarak yazılır.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n},\ a \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{Z}.$$

4 Verilen çarpımları hesaplayınız:

a) $y^{12} \cdot y^4$; b) $x^2 \cdot x^{-4} \cdot x^5$; c) $a^{-2} \cdot a^{-5} \cdot a^5 \cdot a^2$; ç) $(x-5)^{10} \cdot (x-5)^5$.

1.3. Aynı Tabanlı Kuvvetlerin Bölümü

Düşününüz:

- Aynı tabanlı kuvvetlerin bölümünü, aynı tabanlı kuvvetlerin çarpımına dönüşebilir mi?

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ olduğunu göz önünde bulundurarak, eş tabanlı kuvvetlerin her bölümünü, eş tabanlı kuvvetlerin çarpımına dönüştürebiliriz.

a herhangi reel sayı fakat $a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere a^n ve a^m kuvvetlerini bölelim.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}\,.$$

!

❖ Tabanları aynı olan üslü ifadelerde bölme işlemi yapılırken taban aynen yazılır, üsler çıkarılır ve tabanın üssü olarak yazılır.

$$a^n : a^m = a^{n-m},\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ m, n \in \mathbb{Z}.$$

Üslü ifadelerin bölümünde, 0 ile bölmenin mümkün olmadığına göre, tabanı a için $a \neq 0$ koşulunun sağlanması mecburidir.
Bu nedenle ilerde bu koşulun varlığını özel olarak vurgulamadan, bölenin her zaman 0'dan farklı olduğunu varsayacağız.

Şu ödevi çözünüz:

5 Şu bölümleri hesaplayınız:

a) $(-2)^6 : (-2)^3$; b) $(x+2)^4 : (x+2)^6,\ x \neq -2$; c) $\frac{y^{12}}{y^4},\ y \neq 0$.

1.4. Üslü İfadenin Kuvveti

Üslü ifadelerin tanımından $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-defa}} = a^n$ olduğunu biliyoruz.

- Bunu göz önünde bulundurarak şunu doğrulayabiliriz:

$$\left(a^2\right)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\cdot 3} = a^6.$$

❖ Üslü ifadelerin kuvveti tek olarak belli değildir.

Yani, bir üslü ifade, kuvvet alma işlemi yardımıyla birçok farklı şekilde gösterilebilir.

Şu örneği inceleyiniz:

Örnek 2 $a^{18} = a^{2\cdot 9} = \left(a^2\right)^9 = \left(a^9\right)^2,\ a^{18} = a^{3\cdot 6} = \left(a^3\right)^6 = \left(a^6\right)^3,\ a^{18} = a^{1\cdot 18} = \left(a^1\right)^{18} = \left(a^{18}\right)^1.$

6 Şu ifadeleri tabanı y olan kuvvet biçiminde gösteriniz:

a) $\left(y^2\right)^7$; b) $\dfrac{\left(y^2\cdot y\right)^6}{y^3},\ y\neq 0$; c) $\dfrac{\left(y^4\cdot y^3\right)^6}{\left(y^2\right)^4},\ y\neq 0$.

Şimdi yedek aynı tabanlı üslü ifadelerin çarpımını, bölümünü ve kuvvetini inceledik.

- Tabanları farklı, fakat üsleri aynı olan üslü ifadelere ne yapabiliriz?

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 3

$$a^2\cdot c^2 = \underset{2}{a\cdot a}\cdot\underset{2}{c\cdot c} = (ac)\cdot(ac) = (ac)^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{\underset{2}{a\cdot a}}{\underset{2}{c\cdot c}} = \left(\frac{a}{c}\right)\cdot\left(\frac{a}{c}\right) = \left(\frac{a}{c}\right)^2,\ c\neq 0.$$

Verilen örnekten şu sonuca varıyoruz:

❖ Tabanları farklı, fakat kuvvetleri aynı olan üslü ifadeleri çarparken, tabanlar çarpılır, kuvvetler ise aynı kalır.

$$a^n\cdot b^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-defa}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{-defa}} = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{-defa}} = (ab)^n.$$

❖ Benzer şekilde, tabanları farklı, fakat kuvvetleri aynı olan üslü ifadeleri bölerken, tabanlar bölünür kuvvetler ise aynı kalır.

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-defa}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{-defa}}} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\text{-defa}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b\neq 0.$$

!

❖ $(ab)^n = a^n\cdot b^n$ ve $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ b\neq 0$

formülleri, çarpım ve bölümün kuvvetine ait formülleridir.

7 Verilen ifadeleri sadeleştiriniz:

a) $\dfrac{x^5\cdot y^5}{z^{10}},\ z\neq 0$; b) $\dfrac{3^6\cdot 10^6}{5^6}$; c) $\dfrac{3^x\cdot 24^x}{6^{2x}}$.

❖ Çarpımın kuvveti formülünden yararlanarak, tabanı negatif reel sayı olan üslü ifadenin herhangi bir kuvvetinin işaretini kolay belirtebiliriz, çünkü

$$(-a)^n = ((-1)\cdot a)^n = (-1)^n \cdot a^n \text{ dir.}$$

8 Şu ifadelerin verilen kuvvetini alınız:

a) $\left(\dfrac{2x^2 \cdot y^3}{z^4}\right)^3$, $z \neq 0$ b) $\left(-\dfrac{x^5 \cdot y^3}{3z^2}\right)^4$, $z \neq 0$.

1.5. Doğal Sayıların Çözümlenmesi

Her doğal sayıyı $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$ şeklinde yazılışına, sayının 10 tabanına göre çözümlenmiş şekli denir.

Birlikler, onluklar, yüzlükler, binlikler vb. ile çözümlenmiş biçiminde yazacağımız birkaç doğal sayıyı inceleyelim.

Örnek 4

$$45 = 4 \cdot 10 + 5$$
$$235 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5$$
$$4235 = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5.$$

Bu şekilde herhangi daha fazla basamaklı doğal sayı yazılabilir.

Genel durumda 10 tabanına göre çözümleme için şunlar geçerlidir:

İki basamaklı sayı için $\overline{a_1 a_0} = a_1 \cdot 10 + a_0$;

Üç basamaklı sayı için, $\overline{a_2 a_1 a_0} = a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$;

Dört basamaklı sayı için, $\overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = a_3 \cdot 1000 + a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$

⋮

Herhangi bir n – basamaklı sayı için, bir doğal sayı ve 10 tabanlı bir kuvvetin çarpımı biçiminde çözümlenmesi şu şekilde yazabiliriz:me bazë 10 shfrytëzohet ky shënim:

$$\overline{a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0.$$

9 Bir doğal sayı ve 10 tabanlı kuvvetin çarpımı biçiminde şu doğal sayıları çözümlenmiş biçimde yazınız:

a) 89567; b) 500603; c) 1000000.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

   a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$; b) $(-2)^4 < (-2)^3$; c) $x^5 \cdot y^2 < 0$ nëse $x < 0$, $y > 0$.

2. x değerini belirtiniz:

   a) $6^x = 1$; b) $x^{1000} = 1$; c) $x^{2019} = -1$; ç) $(-4)^x = -64$.

3. Verilen işlemleri yapınız:

   a) $x^{n-2} \cdot x^2, x \neq 0$; b) $(x \cdot y^2)^5 \cdot x^3$; c) $\left(\frac{x^2}{2y^4}\right)^3, y \neq 0$.

4. Hesaplayınız:

   a) $(x^n \cdot z^2)^3 \cdot x^3$; b) $(-3x^3y^2z^4)^2$; c) $(2x^3)^7 : (x^2)^5$, $x \neq 0$; ç) $(x^{2n}) : (x^3)^{3n}, x \neq 0$.

5. Şu ifadelerin kuvvetini alınız:

   a) $\left(-\frac{x^2 \cdot y^3}{3z^4} \cdot \frac{9z}{xy}\right)^3$, $x, y, z \neq 0$; b) $\left(3abc^4 \cdot \frac{2}{3a^2b^3c}\right)^3$, $a, b, c \neq 0$;

   c) $\left(\frac{(2a^2 \cdot a^3)^2}{3a^2} \cdot (3a^3 \cdot a^5)^3\right)^2$, $a \neq 0$.

6. Verilen sayıları, bir doğal sayı ve 10 tabanlı kuvvetin çarpımı biçiminde gösteriniz:

   a) 700000; b) 50000; c) 1000000.

7. Verilen denklemlerden x değerini belirtiniz:

   a) $a^{3x} = a^6$; b) $a^{3x} \cdot a^2 = a^6$; c) $(a^x \cdot a^3 : a^4)^3 = (a^6 \cdot a^3)^3$.

8. $|x^n| = |x|^n$! olduğunu ispatlayınız.

2. Tek Terimliler. Tek Terimlilerle İşlemler

$-2, \frac{1}{3}, \pi, \ldots$ gibi sayılar sabitlerdir. *x, y, z, a, b, c,* ....simgelerine ise değişkenler denir ve en çok farklı matematik nesnelerini işaretlemek için kullanılıyorlar. Sabitler ve değişkenler, çok kez çeşitli matematik işlemleriyle: toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve doğal sayı ile kuvvet alma işlemiyle bağlanarak cebirsel ifadeler oluşturuyorlar. Dolayısıyla, cebirsel ifadeleri, hangi işlemlerle meydana gelmiş olduklarına göre sınıflandırıyoruz.

> ❖ Sabitlerin ve değişkenlerin sadece: çarpma ve doğal sayılı kuvvet alma işlemleriyle bağlı olan cebirsel ifadeye **tek terimli** denir.
>
> ❖ Tek terimli olarak, kendi başına sadece bir sabit sayı, sadece değişkenler ya da doğal sayılı kuvvet alma işlemleriyle bağlı olan cebirsel ifade sayılabilir.

Örnek 1

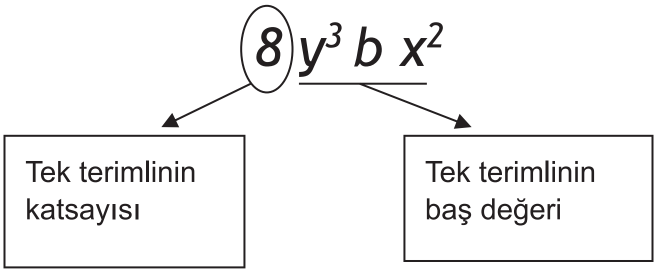
- $-\frac{1}{2}, y, \frac{1}{3}x, 0.9, 5x^2y^5, -2xyz\ldots$ ifadeleri tek terimlilerdir, fakat
  $-3x^2a+y$; $\frac{5x^2}{3a}$; $4a^{-1}x=\frac{4x}{a}$ ifadeleri tek terimliler değildirler.

○ Bu ifadeler neden tek terimli değildirler?
Şu ödevi çözmeyi deneyiniz:

1 Şu ifadelerden hangileri tek terimlidir?

a) $-\frac{1}{2}xy^2z$; b) $\frac{2}{xy^2z}$; c) $3a+5bx$; ç) $-x^5y^2z\cdot\left(-\frac{2}{3}xz^2\right)$; d) 9; e) f.

$8y^3bx^2$ tek terimlisini inceleyelim.



Tek terimlinin katsayısı 8 dir, baş değeri ise değişkenlerin kuvvetleriyle çarpımı olan ifadedir.

2 Verilen tek terimlinin katsayısını ve baş değerini belirtiniz:

a) $-\frac{1}{2}xy^2$; b) xy ; c) 5; ç) $3z$.

- Bir tek terimlinin katsayısını ve baş değeri ancak tek terimli normal şekilde yazıldığı durumda belirtilebilir.

○ Tek terimlinin normal şekli nedir?

Bir tek terimli **normal şekildedir** (**en sade şekildedir**) denir eğer, katsayı olarak sadece bir sabit ve baş değerinde çarpanlar olarak aynı tabanlı kuvvetlerden sadece birer tane varsa.

Örnek 2

$2x^2y^3z$ tek terimlisi normal şekildedir, $2x^2y^3z \cdot 3xy$ tek terimlisi ise normal şekilde tek terimli değildir, çünkü 2 ve 3 sabitleri çarpılabilir, aynı sebepten $x^2 \cdot x = x^3$ ve $y^3 \cdot y = y^4$. Bu şekilde $2x^2y^3z \cdot 3xy$ tek terimlisi $6x^3y^4z$ olarak normal şekilde tek terimliye dönüşür.

3 Verilen tek terimlileri normal şekilde (en sade şekilde) yazınız:

a) $-\frac{1}{2}xy^2z \cdot 2xy \cdot 3z$; b) $abc^4 \cdot 2c^2 \cdot ab$.

- En sade şekilde yazılmış olan her tek terimlinin derecesi vardır.

❖ Tek terimlinin baş değerini oluşturan değişkenlerin derecelerinin toplamı **tek terimlinin derecesidir.**

❖ Tek terimli sadece sabit olduğu durumda, derecesi 0 dır.

Örnek 3

$8y^3bx^2$ tek terimlisinin derecesi 3 + 2 + 1 = 6 dir.

Tek terimlide değişkenin derecesi, kendisinin kuvvetidir.

$8y^3bx^2$ tek terimlisinde "y" değişkeninin derecesi 3

"b" değişkeninin derecesi 1

"x" değişkeninin derecesi 2

"a" değişkeninin derecesi 0 dır (tek terimlinin baş değerine ait olmayan herhangi bir değişkenin derecesi 0 sayılır).

4 Verilen tek terimlilerin derecesini belirtiniz:

a) $2x^2y^2z^2$; b) $3xy^3z$; c) ab .

❖ tek terimliler benzer, ters ya da eşit olabilirler.

- Baş değerleri aynı olan tek terimliler **benzerdir**.

Örnek 4 $7ax^2$, $-5ax^2$, $+\frac{1}{2}ax^2$ tek terimlileri benzerdirler.

- Baş değerleri aynı fakat katsayıları ters sayılar olan tek terimliler **benzer tek terimlilerdir**.

Örnek 5 $3ab$ ve $-3ab$, $-\frac{5}{3}xy^2$ ve $+\frac{5}{3}xy^2$ Ters tek terimlilerdir.

- Katsayıları eşit olan benzer tek terimliler **eşit tek terimlilerdir.**

Sayılarda olduğu gibi, tek terimlilerde de birçok işlemler tanımlanabilir: toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri gibi.

2.1. Tek Terimlileri Toplama ve Çıkarma

❖ Tek terimlilerde toplama ve çıkarma işlemleri, sadece benzer tek terimliler için tanımlanabilir, yani sadece baş değerleri aynı olan tek terimlilerde yapılabilir.

!

❖ İki benzer tek terimliyi, toplarken (çıkarırken), sadece katsayılar toplanır (çıkarılır) baş değerler olduğu gibi kalır.

Tek terimlilerde çıkarma işlemini toplama işlemine dönüştürürüz, çünkü reel sayılarda çıkarma, aslında çıkanın tersi ile toplamadır.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 6

a) $5ax^4+(-2ax^4)+9ax^4=(5+(-2)+9)ax^4=12ax^4$;

b) $3x^4y-(-2x^4y)-9x^4y=(3-(-2)-9)x^4y=-4x^4y$.

5 Verilen tek terimlileri toplayınız: $5a^2x, -ax, -2xa^2, 3xa, -a^2x$.

2.2. Tek Terimlileri Çarpma

Tek terimlilerin çarpma işlemi için şu kural geçerlidir:

!

❖ Herhangi iki tek terimliyi çarparken önce katsayıları çarpılır, ondan sonra baş değerler çarpılır, öyle ki aynı tabanlı kuvvetler birbiriyle çarpılır ve sonunda sadece bir tek terimlide bulunan kuvvet varsa çarpımda olduğu gibi eklenir.

Örnek 7

a) $6ab\cdot 3a^2=(6\cdot 3)a^{1+2}b=18a^3b$;

b) $5x^2y^2\cdot\left(-2axy^3\right)=\left(5\cdot(-2)\right)x^{2+1}y^{2+3}a=-10x^3y^5a$.

6 Verilen tek terimlileri çarpınız: $-3a^2bc^3,\ -abx,\ 2xa^2c$.

2.3. Tek Terimlileri Bölme

Tek terimlilerin bölme işlemi için şu kural geçerlidir:

❖ Herhangi iki tek terimliyi bölerken önce katsayıları, ondan sonra baş değerleri bölünür.
Baş değerler bölünürken, aynı tabanlı kuvvetlerin bölümü kuralı uygulanmalıdır.

Örnek 8

a) $3a^5b^2:\left(-6a^3b^2\right)=\left(3:(-6)\right)a^{5-3}b^{2-2}=-\frac{3}{6}a^2=-\frac{1}{2}a^2$;

b) $6a^3b^2c:5ab^3=\frac{6}{5}a^{3-1}b^{2-3}c=\frac{6}{5}a^2b^{-1}c=\frac{6a^2c}{5b}$;

c) $5x^2y^3:\left(-2axy^2\right)=\left(5:(-2)\right)x^{2-1}y^{3-2}a^{0-1}=-\frac{5}{2}xya^{-1}=-\frac{5}{2}\cdot\frac{xy}{a}=-\frac{5xy}{2a}$.

7 Verilen tek terimlileri toplayınız: $3a^2bc, -abx$.

2.4. Tek terimlinin Kuvveti

❖ Bir tek terimlinin herhangi bir doğal sayılı kuvvetini alırken, önce tek terimlideki her çarpanın kuvveti alınır, ondan sonra da elde edilen kuvvetler çarpılır.

Örnek 9

a) $\left(-2ax^2y^3\right)^2=(-2)^2(a)^2\left(x^2\right)^2\left(y^3\right)^2=+4a^2x^{2\cdot 2}y^{3\cdot 2}=4a^2x^4y^6$;

b) $\left(-3x^3y^4\right)^3=(-3)^3\left(x^3\right)^3\left(y^4\right)^3=-27x^{3\cdot 3}y^{4\cdot 3}=-27x^9y^{12}$.

Kuvvet alma işlemini yaparken işaretlerin değişimine dikkat ediniz.

8 $-3a^2b^3c$ tek terimlisinin 5 inci kuvvetini alınız.

Not:

- İki benzer tek terimlinin toplamı, farkı ya da çarpımı yine tek terimli olduğunu vurgulamalıyız.
- Tek terimlinin kuvveti de tek terimlidir.
- İki tek terimlinin bölümü tek terimli olmayabilir, örnek 8' e bakınız.

9 Verilen işlemleri yapınız:

a) $-x^4y^2+6x^4y^2-9x^4y^2$ b) $-\frac{1}{3}xy^2z\cdot\frac{3}{4}x^2y^3z^2$

c) $3xy^6z^4:5xy^3z^2$ ç) $\left(-\frac{1}{3}xy^2z\right)^2$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen tek terimlilerin katsayısını ve baş değerini belirtiniz:

a) $\frac{3}{5}x^6y^5z^{10}$; b) $20a^4b^2c$; c) b^2.

2. Verilen tek terimliyi normal (en sade şekilde) dönüştürünüz:

a) $2a^2b2ab^2$; b) $\frac{1}{2}a^2b2b^3$; c) $\frac{2}{3}b^2b^6$.

Ondan sonra elde edilen tek terimlilerin tersini yazınız.

3. Verilen tek terimliler benzer midir?

a) $-2a^3b^2xab$ ve $5\cdot2abx^2a^2b^3$; b) ab^2xy^2b ve $2yabbxy3b$.

4. Verilen işlemleri yapınız:

a) $-5ab^3\cdot\left(\frac{1}{10}a^3b\right)\cdot\left(-5a^2b^2\right)$; b) $\left(-\frac{1}{5}a^4b^2\right)^2$; c) $\frac{3}{5}x^6y^5z^{10}:\left(-\frac{9}{20}x^2yz^5\right)$.

5. Verilen işlemler yapınız ve elde edilenleri en sade şekilde yazınız:

a) $\frac{1}{2}ab(-4a)+2b\left(-\frac{1}{2}a^2\right)+3a^2b-\left(3a^2b-5a^2b\right)$;

b) $\frac{1}{2}a\left(-2ab^2\right)^3+3b^2\left(-ab\right)^4+3\left(ab^3\right)^2a^2-2a^2b^4\left(-3a^2b^2\right)$;

c) $\left[\left(\frac{3}{4}x^2\right)\left(-2xy^2\right)+\left(\frac{1}{5}x^4y^3\right):\left(-\frac{2}{5}xy\right)\right]:(-xy)+\frac{1}{3}y(3x)^2$;

ç) $\left[\left(3x^2y-\frac{5}{2}x^2y\right)^3:\left(-\frac{1}{4}x^4y^2\right)-\left(+\frac{1}{3}y\right)\left(-x^2\right)\right]\left(-xy^2\right)+\left(\frac{1}{2}xy\right)\left[\frac{5}{6}xy+\frac{1}{6}xy\right]^2$;

d) $\left\{\frac{3}{2}\left[\left(-\frac{3}{2}x^3y^2\right)^2:\left(-\frac{3}{2}x^2y\right)^3-\frac{1}{3}y\right]^3\cdot(-x)^3\right\}:\left(\frac{3}{2}xy\right)^3-\frac{5}{9}\left(-x^3y+2x^3y\right)^2:\left(-x^6y^2\right)$.

3. Polinomlar (Çok terimliler). Polinomları Toplama ve Çarpma

Bir tek terimli, bir sabit ve değişkenlerin doğal sayılı kuvvetlerinin çarpımı olduğunu biliyoruz.

Şu örneği inceleyelim.

Örnek 1

$P=4xy^2,\ Q=-\frac{3}{8}x^2y,\ R=-4x^3y^2,\ T=xy$ örneğini inceleyelim.

Aslında iki tek terimlinin toplamından (farkından) oluşan $P+Q=4xy^2+\left(-\frac{3}{8}x^2y\right)$ ifadesine **binom** (**iki terimli**) denir.

$P+Q+R=4xy^2+\left(-\frac{3}{8}x^2y\right)+\left(-4x^3y^2\right)$ ifadesi gibi üç tek terimliden oluşan ifadelere **üç terimli** (**trinom**) denir.

$P+Q+R-T=4xy^2+\left(-\frac{3}{8}x^2y\right)+\left(-4x^3y^2\right)-xy$ gibi üçten fazla tek terimliden oluşan ifadeye **polinom** denir.

!

- Sonlu sayıda tek terimlilerin toplamına **polinom** ya da **cebirsel ifade** denir.
- İki tek terimlinin toplamına **binom (iki terimli)**, üç tek terimlinin toplamına **üçterimli (trinom)** denir.
- Dört ya da daha fazla tek terimlilerin toplamına **polinom** denir.

Önceki başlıkta, tek terimlinin en sade şekilde nasıl dönüştürüldüğünü ve derecesinin nasıl belirtildiğini gördük. Bir polinomun derecesinin nasıl belirtildiğini şu örnekle gösterelim.

Örnek 2 $5x^2y+3ab^5$ polinomun derecesini belirtelim:

$$\underbrace{5x^2y}_{\text{Derecesi } 2+1=3} + \underbrace{3ab^5}_{\text{Derecesi } 1+5=6}$$

Polinomun derecesi 6 dır

!

- ❖ Bir polinomun oluştuğu tek terimlilerin her biri en sade şekilde (normal şekilde) ise, **polinom normal şekildedir** denir.
- ❖ En sade şekilde olan bir **polinomun derecesi**, oluştuğu tek terimlilerden en büyük dereceli olan tek terimlinin derecesidir.

1 Verilen polinomların derecesini belirtiniz:

a) $2a+2b+\frac{1}{2}ab-2a^2b^2$; b) $-81x^2y^3-\frac{27}{2}xy^6-27y^4$.

- Polinomun meydana geldiği tek terimlilerin derecelerine bağlı olarak, polinomları şu şekilde sınıflandırabiliriz:

- **Homojen polinomlar –** polinomun oluştuğu tek terimlilerin dereceleri eşittir.

Örnek 3 $\underset{2.derece}{6xy} + \underset{2.derece}{3x^2} - \underset{2.derece}{4ab}$;

- **Komple polinomlar –** polinomda değişkenin derecesi en küçükten en büyük dereceye kadar mevcuttur.

Örnek 4 $\underset{3.derece}{3x^3} + \underset{1.derece}{2x} - \underset{2.derece}{5x^2} + \underset{0.derece}{7}$;

- **Sıralı polinomlar -** polinomda değişkenin derecesi en küçükten en büyük dereceye kadar mevcut olarak büyüklüklerine göre en büyüğünden en küçüğüne göre sıralıdır.

Örnek 5 $\underset{3.derece}{3x^3} - \underset{2.derece}{5x^2} + \underset{1.derece}{2x} + \underset{0.derece}{7}$;

2 Polinomu oluşturduğu tek terimlinin derecelerine bağlı olarak aşağıda verilen polinomlar nasıldır?

a) $5y^5-2y^2+y^3-6y^4-y+2$; b) $5a^5-2a^4+a^3-6a^2-a+1$; c) $-6ay^4-b^3y^2+ab^3c$.

Her polinom sonlu sayıda tek terimlinin cebirsel toplamı olduğuna göre, polinomlarda tüm işlemler tek terimlilerdeki işlemlerin tanımlarıyla yapılmaktadır.

3.1. Polinomları Toplama

Polinomların toplamı, benzer tek terimlilerin toplamına dönüşür.

! İki polinomu toplamak için, onlara ait benzer tek terimliler toplanır.

Polinomların toplamını şu örnekle açıklayacağız:

Örnek 6

$(x + 3y) + \underline{(y - 6x)} \underline{- (x - y + 2)} = \underline{x} + 3y + y - \underline{6x} - \underline{x} + y - 2 =$

İşaretleri değiştirmeden parantezlerden kurtulma

İşaretlerin değişmesi:
$x \to -x$
$-y \to +y$
$+2 \to -2$

$= (1 - 6 - 1)x + (3 + 1 + 1)y - 2 = -6x + 5y - 2$

3 Verilen polinomları toplayınız: $5x^5-ax+a^2, 3x^2+2ax+a^2, 4ax-3x^2-2$.

3.2. Monomu Polinomla Çarpma

Monomu polinomla çarpma işlemini yapmak için, şunu bilmelisiniz:

! Tek terimliyi polinomla çarpmak için, polinoma ait olan her tek terimli verilen tek terimli ile çarpılır.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 7

Çarpma

$$2xy\cdot(a+b-2cx)=2xy\cdot a+2xy\cdot b+2xy\cdot(-2cx)=2axy+2bxy-4cx^2y$$

Çarpma

$$(4a-3bx)\cdot 2abx = 4a\cdot 2abx+(-3bx)\cdot 2abx=8a^2bx-6ab^2x^2.$$

Polinomu tek terimli ile çarpma, aslında çarpma işleminin toplama işlemine göre dağılma kanunun uygulanmasıdır.

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C\,.$$

4 $2x^3-x^2y+3xy^2-5y^3$ polinomunu $-2x^2y$ tek terimli ile çarpınız.

5 Verilen işlemleri yapınız:

a) $(3x^2y+2y^3)+(-3x^2y+2xy^2-y^3+2)$; b) $\left(3a^4b^2+\frac{2}{3}a^3b^3+4a^2b^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)$.

3.3. Polinomları Çarpma

Polinomu polinomla çarpmak için şu kural geçerlidir:

! Polinomu tek terimli ile çarpma, aslında çarpma işleminin toplama işlemine göre dağılma kanunun uygulanmasıdır, öyle ki burada polinomu tek terimli ile çarpma işlemi birkaç defa uygulanmaktadır.

Yukarıdaki açıklamayı daha kolay anlamak için şu pratik örneği inceleyelim.

Örnek 8

$$(x+y)\cdot(2x-y+1)=x\cdot(2x-y+1)+y\cdot(2x-y+1)=2x^2-xy+x+2xy-y^2+y=2x^2+xy+x+y-y^2$$

Çarpma

b) $22b^2-12b^3+8b^4-3b+5$ ve $4b^2+1$ polinomlarının çarpımını hesaplayalım.
İlk önce birinci çarpan olan $22b^2-12b^3+8b^4-3b+5$ polinomunu, ikinci çarpan olan $4b^2+1$, polinomun her tek terimlisi ile çarpılır, yani

$$\left(22b^2-12b^3+8b^4-3b+5\right)\cdot 4b^2+\left(22b^2-12b^3+8b^4-3b+5\right)\cdot 1,$$

Bu şekilde işlem, bir polinomun tek terimli ile çarpımına dönüşür, oradan:

$$22b^2\cdot 4b^2-12b^3\cdot 4b^2+8b^4\cdot 4b^2-3b\cdot 4b^2+5\cdot 4b^2+22b^2\cdot 1-12b^3\cdot 1+8b^4\cdot 1-3b\cdot 1+5\cdot 1$$

oradan da:

$$88b^4-48b^5+32b^6-12b^3+20b^2+22b^2-12b^3+8b^4-3b+5$$

benzer terimleri toplayarak:

$$\underline{88b^4}-48b^5+32b^6-\underline{\underline{12b^3}}+\underline{\underline{\underline{20b^2}}}+\underline{\underline{\underline{22b^2}}}-\underline{\underline{12b^3}}+\underline{8b^4}-3b+5=$$

$$=32b^6-48b^5+96b^4-24b^3+42b^2-3b+5.$$

elde edilir.

6 Verilen işlemleri yaptıktan sonra polinomları en sade şekilde dönüştürünüz.

a) $\left(x^5+\dfrac{2}{3}x^3-2x^2+4\right)\cdot\left(2x^2+1\right);$

b) $\left(x^2+1\right)\left(y-2\right)-\left(3xy+6\right)\left(\dfrac{1}{3}x-2\right)+2x\left(x+1\right).$

!

❖ En sade şekilde yazılmış olan iki polinomun aynı kuvvetli değişkenlerinin karşılıklı katsayıları birbirine eşit olduğu durumda polinomlar birbirine **eşittirler** (**denktirler**).

Örnek 9

$\left(x^5+3x-2\right)\cdot\left(2x^2+1\right)+4\left(-\frac{1}{2}x^7+x^2\right)$ ve x^5+6x^3+3x-2 polinomlarını inceleyelim.

$\left(x^5+3x-2\right)\cdot\left(2x^2+1\right)+4\left(-\frac{1}{2}x^7+x^2\right)$ polinomunda gereken işlemlerin yapılmasıyla ve elde edilen polinomu en sade şekilde yazdıktan sonra x^5+6x^3+3x-2 polinomu elde edilir. Demek ki verilen iki polinom birbirine eşittir.

7 $\left(3x^2y+2y^3\right)+\left(-3x^2y+2xy^2-y^3+2\right)$ ve $\left(x^2+1\right)\left(y-2\right)-\left(3xy+6\right)\left(\frac{1}{3}x-2\right)+2x\left(x+1\right)$ polinomları birbirine eşit midir?

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen polinomu en sade (normal) şekilde dönüştürünüz:

a) $\left(x^5+6x^3+3x-2\right)-\left(4x^3+x-8\right)$

b) $\left(\frac{1}{3}ab^2-\frac{1}{4}b^3\right)-\left(-\frac{5}{3}a^3+\frac{1}{3}ab^2\right)-\left(\frac{3}{2}a^2b+\frac{3}{4}b^3\right)+\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{5}{2}a^2b\right)$.

2. Verilen polinomun sayı değerini hesaplayınız:

a) $5xyz-\left(2x^2yz+5yz-\left(x^2y^3z-3xy-\left(y^2-z^2\right)\right)\right)$, për $x=-2, y=3, z=-1$;

b) $3ab-\left(4a^2bc-2bc-\left(-3a^2b^3c-ab^3-\left(abc^2+2b^2-\left(2abc-c\right)\right)\right)\right)$,

për $a=-1, b=1, c=-2$.

3. Aşağıdakilerde gereken işlemleri yaptıktan sonra elde edilen polinomu en sade şekilde yazınız:

a) $\frac{3}{2}xy-\frac{1}{2}x\left[\frac{1}{2}y(-xy)+2xy^2-\frac{3}{2}x\left(-\frac{1}{3}y^2\right)\right]-xy$

b) $\left(2+a^2\right)\left(a+b\right)+\frac{1}{2}\left(a+2b^2\right)\left(b-2a^2\right)-b\left(a^2+b^2\right)$.

4. Verilen polinomların birbirine eşit olması için m, n ve p belirtilsin.

$P(x)=\left(mx^2+nx+p\right)\cdot(3x-2)$ ve $Q(x)=6x^3-13x^2+9x-2$.

5. $A=x^2-2xy+2y-5;\ B=-3x^2-xy-3x-2;\ C=2x^2-3xy+y^2$ polinomları veriliyor.

Şunları hesaplayınız: a) $A-(B+C)$; b) $C\cdot(B-A)$; c) $A-B+C$.

6. Alıştırma 4' te verilen polinomlar için, aşağıdaki eşitliklerin doğru olup olmadıklarını yoklayınız.

a) $A+(B+C)=(A+B)+C$; b) $A\cdot B=B\cdot A$; c) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

4. Kısa Çarpma Formülleri

Polinomlarla çarpma işlemlerini yaparken, bazı özel durumlarda bazı formülleri kullanarak polinomların çarpma işlemini kısaltarak kolaylaştırabiliriz.
Polinomların Çarpımında uygulanmasına çok rastlanan bazı özel durumda olan polinomların çarpımı üzerinde duralım. Bu durumları temsil eden özdeşliklere **kısa çarpma formülleri** denir.

$A^2 = A \cdot A$ olduğunu biliyoruz. $A = x+3$ olsun. O halde

$$A^2 = (x+3)^2 = (x+3)\cdot(x+3) = x\cdot x + x\cdot 3 + 3\cdot x + 3\cdot 3 = x^2 + 6x + 9 \text{ elde edilir.}$$

Elde edilen sonucu

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2.$$

biçiminde yazabiliriz.

!

$$\left.\begin{array}{l}(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2\\(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2\end{array}\right]$$

formüllerine **binomun karesi formülleri** denir.

!

$$\left.\begin{array}{l}(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\\(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3\end{array}\right]$$

formüllerine **binomun küpü formülleri** denir.

❖ Binomun karesi ve küpü formüllerine **kısa çarpma formülleri** denir.

Örnek 1 Verilen binomların kuvvetini alalım:

a) $(3x-5y)^2$ b) $(x-2)^3$.

Binomun karesi formülünü kullanarak:
$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ formülünde, $A = 3x$, a $B = 5y$ olduğunu varsayarak
$(3x-5y)^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2$,
elde edilir, oradan da:

$(3x-5y)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2=9x^2-30xy+25y^2$ elde edilir.

b) $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$ binomun küpü formülünde, A ve B yerine $A=x$, $B=2$ olarak değiştirirsek

$(x-2)^3=(x)^3-3\cdot(x)^2\cdot(2)+3\cdot(x)\cdot(2)^2-(2)^3=x^3-6x^2+12x-8$ elde edilir.

1 Kısa çarpma formüllerini kullanarak hesaplayınız:

a) $(2ab^2-a^3b)^2$; b) $\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}b^3\right)^2$; c) $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}y\right)^3$.

Örnek 2 Verilen çarpımı hesaplayalım.

$(x+4y^2)\cdot(x-4y^2)=x^2-4xy^2+4xy^2-16y^4=(x)^2-(4y^2)^2$.

2 Çarpımları hesaplayınız:

a) $(2a^3-3b^2)(2a^3+3b^2)$; b) $(3x^2+2y^3)(3x^2-2y^3)$.

$(2a^3-3b^2)(2a^3+3b^2)$ çarpımı yapıldıktan sonra:

$(2a^3-3b^2)(2a^3+3b^2)=4a^6-9b^4=(2a^3)^2-(3b^2)^2$ elde edilir.

Benzer şekilde $(3x^2+2y^3)(3x^2-2y^3)$ çarpımı da yapılır.

Genel olarak, bu gibi binomların çarpımı şu formül geçerlidir:

!

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$$

Formülü, **karelerin farkı formülü** adıyla tanınır.

Örnek 3 Verilen çarpımları hesaplayalım:

a) $(2a^3+3b^2)(4a^6-6a^3b^2+9b^4)$; b) $(3x-2y^2)(9x^2+6xy^2+4y^4)$.

$(2a^3+3b^2)(4a^6-6a^3b^2+9b^4)$ çarpımı yapıldıktan sonra.

$$(2a^3+3b^2)(4a^6-6a^3b^2+9b^4)=8a^9-12a^6b^2+18a^3b^4+12a^6b^2-18a^3b^4+27b^6=$$
$$=8a^9+27b^6=$$
$$=(2a^3)^3+(3b^2)^3$$

elde edilir.

Benzer şekilde $(3x-2y^2)(9x^2+6xy^2+4y^4)=(3x)^3-(2y^2)^3$ çarpımı da elde edilir.

Genel olarak, bu gibi çarpımları hesaplamak için küplerin toplamı ve farkı formüllerinden yararlanılır.

!

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$
$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).$$

Küplerin farkı ve küplerin toplamı formülleri, küplerin farkı ve küplerin toplamı biçiminde olan ifadelerin çarpım biçiminde gösterilmesidir.

3 Hesaplayınız:

a) $\left(-\frac{4}{9}ab^2+1\right)\left(1+\frac{4}{9}ab^2\right)$; b) $\left(-5-\frac{1}{5}x^4\right)\left(-5+\frac{1}{5}x^4\right)$;

c) $(3x^2y^3+4x)\cdot(9x^4y^6-12x^3y^3+16x^2)$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen binomların kuvvetlerini alınız:
a) $(x^2y-2xy^3)^2$; b) $(2xy^2-x^2)^3$; c) $\left(-\frac{3}{2}x+2y\right)^3$.

2. Kısa çarpma formüllerini kullanarak verilen polinomları çarpınız:
a) $\left(\frac{2}{3}x-y\right)\cdot\left(y+\frac{2}{3}x\right)$; b) $(a^2+3b+c)\cdot(c+3b-a^2)$;
c) $\left(-5-\frac{1}{5}x^4\right)\cdot\left(25-x^4+\frac{1}{25}x^8\right)$; ç) $\left(\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2y\right)\cdot\left(\frac{9}{4}x^6-\frac{3}{8}x^5y+\frac{1}{16}x^4y^2\right)$.

3. En hızlı şekilde hesaplayınız: a) 79^2; b); 1999^2 c) $42 \cdot 38$; ç) 5,99·6,0; d) $751^2–249^2$

4. Verilen üç terimlinin kuvvetini (karesini) alınız:
a) $(2a^2b^2+ab-3)^2$; b) $(4x^2+y^2-4xy)^2$.

5. $A=x-1,\ B=-x-1,\ C=1-x,\ D=x+1$ binomları veriliyor. Hangilerinin kareleri aynıdır?

6. Verilen ifadeleri sadeleştiriniz:

a) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$; b) $(x-y+z)^2+(x+y)^2-(x+z)^2$.

7. Verilen işlemleri yapınız. Mümkün olduğu yerde kısa çarpma formüllerinden yararlanınız ve ifadeleri en sade şekilde yazınız:

a) $\left(a+\frac{3}{2}b\right)\left(\frac{3}{2}b-a\right)-\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)^2(-3)-2a(a+b)$;

b) $(a+b^2)^3-b^4\left[3\left(a-\frac{1}{2}\right)+(b+1)(b-1)\right]+\left(-\frac{3}{2}\right)(a^2+b^2)^2$;

c) $(x^2-3x+2)^2+x^2(x+2)(x-3)-2x(x-1)^3+x(x^2+10)$.

8. Verilen eşitlikleri ispatlayınız:

a) $a^4-1=(a-1)(a^2+1)(a+1)$; b) $(x-y)^2=(y-x)^2$; c) $(x+y)^2=(-x-y)^2$.

5. Polinomları Bölme

Tek terimlilerin bölümü aslında, katsayıların bölümü reel sayıların bölümü kuralına göre, baş değerlerin bölümü de üslü ifadelerin bölümü kuralına göre yapılmaktadır.

Örnek, $\frac{3}{4}a^3b^2c:\left(\frac{1}{4}abc\right)=\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{4}\right)(a^3b^2c):(abc)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}\right)a^{3-1}b^{2-1}c^{1-1}=3a^2bc^0=3a^2b.$

- Polinomlar, sonlu sayıların cebirsel toplamı olduğuna göre, bir polinomun tek terimli ile bölümü yaparken, polinomdaki her tek terimli, bölen gibi verilen tek terimli ile bölünür ve elde edilen bölümler toplanır.

Bu işlem, bölme işleminin toplama işlemine göre dağılma kanunu ile uyumludur.

$$(A+B):C=A:C+B:C.$$

Örnek 1

bölme

$$\left(3a^2+5ab-7a^3\right):3a = a+\frac{5}{3}b-\frac{7}{3}a^2$$

bölüm polinomdur

bölme

$$\left(3a^2-ay^3\right):a^2 = 3-a^1y^3 = 3-\frac{y^3}{a}$$

bölüm polinom değildir

Örnek 2 $\left(3a^4b^2+\frac{2}{3}a^3b^3+4a^2b^4\right):\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)$ bölümünü hesaplayalım.

Dağılma kanununa göre:

$3a^4b^2:\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)+\frac{2}{3}a^3b^3:\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)+4a^2b^4:\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)$ elde edilir.

Tek terimliyi tek terimli ile bölme kuralına göre:

$3:\left(-\frac{1}{4}\right)a^4b^2:\left(a^2b^2\right)+\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{4}\right)a^3b^3:\left(a^2b^2\right)+4:\left(-\frac{1}{4}\right)a^2b^4:\left(a^2b^2\right),$

oradan da $-12a^2-\frac{8}{3}ab-16b^2$ elde edilir.

Çözümün yoklamasını yaparsak:

$\left(-12a^2-\frac{8}{3}ab-16b^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)=3a^4b^2+\frac{2}{3}a^3b^3+4a^2b^4$ elde edilir.

1 Verilen bölümleri hesaplayınız:

a) $\left(9x^5y^3+27x^4y^4+15x^3y^5\right):\left(-3x^3y\right)$;

$\left(\frac{3}{8}x^4y^3-\frac{3}{2}x^3y^2-\frac{1}{8}x^3y^5\right):\left(\frac{1}{4}x^3y^2\right).$

Polinomu polinomla bölmek ise, polinomu tek terimli ile bölme işlemi gibi o kadar basit değildir.

!

Bir polinomu polinomla bölme işlemini şu adımları izleyerek yapacağız:

1) Önce bir polinomu diğer bir polinomla bölmek için, bölen polinomun derecesi bölünenin derecesinden daha küçük ya da eşit olmalıdır.
2) Polinomlar verilen değişkenin en büyük derecesinden başlayarak en küçük derecesine göre sıralanmalıdır.
3) Bölme işlemi daima bölünen polinomun ilk tek terimlisi, bölenin ilk tek terimlisi ile bölünerek başlanılır ve elde edilen bölüm, bölenin tüm tek terimlileri ile çarpılır ve bölünenden çıkarılır. Bu işlem bölme işlemi bitinceye kadar devam eder, yani bölenin derecesinden daha küçük dereceli polinom elde edinceye kadar.

Bu kaideyi şu örnekle açıklayacağız:

Örnek 3 Verilen polinomları bölelim:

$$\left(22b^2-12b^3+8b^4-3b+5\right):\left(4b^2+1\right).$$

Bu örnekte, $22b^2-12b^3+8b^4-3b+5$ bölünenini değişkenin derecelerine göre en büyüğünden başlayarak küçüğe göre sıralayarak yazıyoruz. Buna göre, $8b^4-12b^3+22b^2-3b+5$. elde edilir.

Demek ki, $\left(8b^4-12b^3+22b^2-3b+5\right):\left(4b^2+1\right)$. bölümünü hesaplamalıyız.

- Şimdi, bölünenin ilk tek terimlisi $8b^4$, bölenin ilk tek terimlisi olan $4b^2$ ile bölünür, yani $8b^4:4b^2=2b^2$. Elde edilen bölüm $2b^2$, bölen ile çarpılır $2b^2\cdot\left(4b^2+1\right)=8b^4+2b^2$. Elde edilen çarpım bölünenden çıkarılır:

$$\left(8b^4-12b^3+22b^2-3b+5\right)-\left(8b^4+2b^2\right)=-12b^3+20b^2-3b+5.$$

Elde edilen fark bölmenin ilk kalanıdır ve şimdi ikinci bölünen olarak rol alır.

- Önceki işlemi tekrarlıyoruz öyle ki, şimdi ikinci bölünen olarak $-12b^3+20b^2-3b+5$ dir. Bölünenin birinci tek terimlisi $-12b^3$, bölenin ilk tek terimlisi olan $4b^2$ ile bölünür, $-12b^3:4b^2=-3b$ elde edilir. Elde edilen $-3b$ bölümü bölenle çarpılır, $-3b\cdot\left(4b^2+1\right)=-12b^3-3b$ elde edilir. Elde edilen sonucu bölünenden çıkarıyoruz, $-12b^3+20b^2-3b+5-\left(-12b^3-3b\right)=20b^2+5$. Elde edilen fark bölme işleminin ikinci kalanıdır ve üçüncü bölünen rolüne geçer.

- Önceki işlemi tekrarlıyoruz öyle ki, şimdi üçüncü bölünen olarak $20b^2+5$ polinomudur. Bölünenin birinci tek terimlisi $20b^2$, bölenin ilk tek terimlisi olan $4b^2$ ile bölünür, $20b^2:4b^2=5$. Elde edilen bölüm 5, bölen ile çarpılır ve $5\cdot\left(4b^2+1\right)=20b^2+5$ elde edilir. Elde edilen çarpım

- bölünenden çıkarılır, $20b^2+5-\left(20b^2+5\right)=0$ elde edilir. Bu şekilde polinomların bölümü bitmiştir. Elde edilen sonuç yukardaki bölümlerin toplamıdır yani $2b^2-3b+5$ dir.

Bölümün yoklamasını yaparsak:

$$\left(2b^2-3b+5\right)\cdot\left(4b^2+1\right)=22b^2-12b^3+8b^4-3b+5 \text{ elde edilir.}$$

Yukarıda açıklanan polinomların bölüm kaidesini pratikte şöyle yapacağız:

$$\begin{array}{l}
\left(8b^4-12b^3+22b^2-3b+5\right):\left(4b^2+1\right)=2b^2-3b+5 \\
\underline{\pm 8b^4 \qquad\qquad \pm 2b^2} \\
\qquad -12b^3+20b^2-3b+5 \\
\qquad \underline{\mp 12b^3 \qquad\qquad \mp 3b} \\
\qquad\qquad\qquad +20b^2+5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 20b^2 \pm 5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Burada $\pm$ ve $\mp$ işaretlerine rastlıyoruz. İkinci işaret, elde edilen çarpımı polinomdan çıkarıldığı için elde edilir.

Buna göre polinomun çıkarılması aslında ters işaretle toplama işlemine dönüşür.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 4

$$\begin{array}{l}
\left(3x^6+x^2-\frac{3}{2}x+20\right):\left(x^2-x+1\right)=3x^4+3x^3-3x-2 \\
\underline{\pm 3x^6 \mp 3x^5 \pm 3x^4} \\
\qquad 3x^5-3x^4+x^2-\frac{3}{2}x+20 \\
\qquad \underline{\pm 3x^5 \mp 3x^4 \pm 3x^3} \\
\qquad\qquad -3x^3+x^2-\frac{3}{2}x+20 \\
\qquad\qquad \underline{\mp 3x^3 \pm 3x^2 \mp 3x} \\
\qquad\qquad\qquad -2x^2+\frac{3}{2}x+20 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\mp 2x^2 \pm 2x \mp 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{2}x+22
\end{array}$$

Buna göre, $3x^6+x^2-\frac{3}{2}x+20$ polinomunu x^2-x+1 polinomuyla bölersek, bölüm $3x^4+3x^3-3x-2$ ve kalan $-\frac{1}{2}x+22$ elde edilir.

Bunun yoklamasını yapalım:

$\left(3x^6+x^2-\frac{3}{2}x+20\right)=\left(3x^4+3x^3-3x-2\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)+\left(-\frac{1}{2}x+22\right)$ elde edilir.

2 Bölmeyi yapınız:

a) $\left(3a-4a^3+a^5-6\right):\left(a-2\right),\ a\neq 2$;

b) $\left(10a^4-15a^3-19a^2-7a-16\right):\left(5a^2+3\right)$;

c) $\left(-7b^3-b^2+2b^4+4b-3\right):\left(2b-1\right),\ b\neq\frac{1}{2}$;

ç) $\left(x^5+\frac{2}{3}x^3-2x^2+4\right):\left(1+2x^2\right)$.

Polinomları bölerken, bazı durumlarda kısa çarpma formüllerin kullanılması da mümkün olabilir.

Şu örnekte olduğu gibi:

Örnek 5 $\left(36x^2-y^2\right):\left(6x-y\right)$. bölümünü hesaplayalım.

Polinomların bölme kuralından yararlanarak:

$$\left(36x^2-y^2\right):\left(6x-y\right)=6x+y$$

$$\begin{array}{l} \underline{\pm 36x^2 \mp 6xy} \\ \qquad 6xy-y^2 \\ \qquad \underline{\pm 6xy \mp y^2} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

elde edilir. Halbuki:

$\left(36x^2-y^2\right)=\left(\left(6x\right)^2-y^2\right)=\left(6x-y\right)\left(6x+y\right)$, olduğunu göz önünde bulundurmakla:

$\left(36x^2-y^2\right):\left(6x-y\right)=\left(\left(6x\right)^2-y^2\right):\left(6x-y\right)=\left(6x-y\right)\left(6x+y\right):\left(6x-y\right)=\left(6x+y\right)$ elde edilir.

3 Bölümü hesaplayınız:

a) $\left(9x^2-6xy+y^2\right):\left(3x-y\right),\ y\neq 3x$;

b) $\left(a^2-8ab+16b^2\right):\left(a-4b\right),\ a\neq 4b$;

c) $\left(16x^4-y^4\right):\left(2x-y\right),\ y\neq 2x$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. $x, y \neq 0$ olmak üzere verilen polinomun tek terimli ile bölümünü hesaplayınız:

a) $\left(6x^4y^2 + 8x^3y^3 + 4x^2y^4\right) : \left(-2x^2y^2\right)$; b) $\left(4x^5y^3 + \frac{5}{2}x^4y^4 - x^3y^5\right) : \left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right)$.

2. Verilen polinomların bölümünü hesaplayınız:

a) $\left(6a^4 - 5a^3 - 23a^2 + 20a - 4\right) : (3a - 1)$, $a \neq \frac{1}{3}$;

b) $\left(a^4 + \frac{4}{9}a - 1 - \frac{5}{3}a^3\right) : \left(a - \frac{2}{3}\right)$, $a \neq \frac{2}{3}$;

c) $\left(\frac{1}{2}x^5 - x^4 + \frac{5}{2}x - 3\right) : \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)$, $x \neq \pm\sqrt{2}$;

ç) $\left(4y^4 - \frac{5}{4}y^2 - 9y - 9\right) : \left(y + \frac{3}{4}\right)$, $y \neq -\frac{3}{4}$.

3. $5a^5 - 2a^4 + a^3 - 6a^2 - a + 1$ polinomu verilen binom ile bölünüp bölünmediğini yoklayınız:
a) $a - 2$; b) $a + 3$; c) $a - 1$.

4. Kısa çarpma formüllerinden yararlanarak bölmeyi yapınız:

a) $(4x^2 - 12xy + 9y^2) : (2x - 3y)$; b) $(x^3 + 12x^2y + 12xy^2 + 8y^3) : (x + 2y)$;

c) $(4x^2 - 9y^2) : (2x + 3y)$; ç) $(8x^3 + 27y^3) : (4x^2 - 6xy + 9y^2)$.

5. $3x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x - 2$ polinomu $x^2 - 2x + 2$ polinomuyla bölünebilmesi için a ve b reel sayılarını belirtiniz.

6. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + mx^2 + 3x + 2$ polinomu $Q(x) = x^2 - x + n$, polinomuyla bölündüğüne göre m ve n parametrelerini belirtiniz.

6. Ortak çarpanın parantez önüne alınmasıyla polinomların çarpanlara ayrılması

6.3. Polinomda bulunan tüm tek terimlilerden ortak çarpanın ayrılması

❖ Polinomları ortak çarpanın parantez önüne alınmasıyla çarpanlarına ayırma, aslında çarpma işleminin toplama işlemine göre dağılma özelliğinin uygulanmasıdır.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 1 $\underline{x}a + \underline{x}b + \underline{x}c = x \cdot (a + b + c)$.

Üç toplanandan oluşan verilen bu örnekte, x değişkeni her üç tek terimlinin orak çarpanı olduğunu görüyoruz. Bu yüzden onu ortak çarpan olarak parantez önüne alıyoruz. Bu şekilde polinom asal çarpanlarına ayrılmış olur.

Verilen örnekteki polinomu inceleyelim:

Örnek 2 $2a^3b+4a^2b^2+2ab^3$ polinomunda:

- tek terimlilerin her birinin katsayılarının ortak böleni 2 dir;
- baş değerlerin en büyük ortak böleni ab dir;
- tek terimlilerin en büyük ortak böleni $2ab$ dir;
- $2a^3b+4a^2b^2+2ab^3$ polinomunu $2ab$ tek terimlisi ile bölersek, $a^2+2ab+b^2$ elde edilir.

Buna göre, $2a^3b+4a^2b^2+2ab^3=2ab\cdot\left(a^2+2ab+b^2\right)$ elde edilir.

Yukarıdaki iki örnekte, parantez önüne alınan ortak çarpan, tek terimlilerin her birinin ortak çarpanıdır.

Aynı şekilde şu ödevi çözmeyi deneyiniz:

1 Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $4x^2y^2-6x^3y+8x^2y^3$ b) $\frac{15}{4}x^9-\frac{21}{4}x^6-\frac{3}{4}x^3$.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 3 $x(a-3)-y(a-3)$ polinomunda ortak çarpan $(a-3)$ tür ve bunu daha kısa olarak A ile işaret edebiliriz.

Bu şekilde polinom $xA-yA$ şekline dönüşür. Ortak çarpan olan A 'yı parantez önüne alırsak $xA-yA=A(x-y)=(a-3)(x-y)$. elde edilir.

Ortak çarpanı parantez önüne alırken, özellikle işaretlere dikkat etmeliyiz.

Şunu daima göz önüne bulundurmalıyız:

$$A-B=-(-A+B)=-(B-A).$$

Bununla ilgili şunları yazabiliriz:

$$(A-B)^2=(-(-A+B))^2=(-(B-A))^2=(-1)^2(B-A)^2=(B-A)^2$$

$$(A-B)^3=(-(-A+B))^3=(-(B-A))^3=(-1)^3(B-A)^3=-(B-A)^3 \text{ vb.}$$

Düşününüz!

- Şu eşitlikler geçerli olacak mı:

$$(A-B)^{2n}=(B-A)^{2n}\ ?$$

$$(A-B)^{2n-1}=-(B-A)^{2n-1}\ ?$$

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 4 $(3x+2)(5x+2)-(-3x-2)(x+1).$

Bu örnekte $A=3x+2$ olarak alırsak, $-A=-3x-2$ elde edilir.

O halde, $(3x+2)(5x+2)-(-3x-2)(x+1)=A(5x+2)-(-A)(x+1)=A(5x+2)+A(x+1)$. elde edilir.

Şimdi onların ortak çarpanı A dır. O halde:
$A(5x+2)+A(x+1)=A(5x+2+x+1)=A(6x+3)$.yazılabilir.

$6x+3$, binomunun ortak çarpanı 3 olduğunu fark ediyoruz. O halde, $A(6x+3)=A\cdot 3(x+2)=3A(x+2)$, elde edilir ve $A=3x+2$ olduğunu göz önünde bulundurarak:

$$(3x+2)(5x+2)-(-3x-2)(x+1)=3(3x+2)(x+1).$$

elde edilir. Bu durumda ortak çarpan parantez önüne iki defa alındığını görüyoruz. İkinci defa ortak çarpan olarak alınan çarpan, ilk işlemde ortak çarpan olarak fark edilmiyordu.

2 Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:
a) $(2x-3)(x^2+2)+(x^2+2)(-2x+4)$; b) $(b-2a^2)(b^2+2)+(2a^2-b)(1-b^2)$.

6.4. Önce tek terimlileri gruplaştırarak ortak çarpanın parantez önüne alınması

- Polinomlarda tek terimlilerin ortak çarpanı her zaman olmayabilir. Bazı durumlarda ortak çarpan sadece bazı tek terimlilerin olabilir. Bu durumda polinomdaki tek terimlileri gruplandırmak gerekir.

Şu örnekleri inceleyelim:

Örnek 5 $xa+xb+ya+yb$ polinomunu asal çarpanlarına ayıralım.

$xa+xb+ya+yb$ polinomundaki tek terimlilerin ortak çarpanı yoktur. Halbuki bunları ikişer ikişer gruplaştırırsak:

$$\underline{x}a+\underline{x}b+\underline{\underline{y}}a+\underline{\underline{y}}b=x\cdot(a+b)+y\cdot(a+b)$$

$$x\cdot\underline{(a+b)}+y\cdot\underline{(a+b)}=(a+b)(x+y).$$ elde edilir.

Örnek 6 $2a^2c^2+3abc^2+4aby+6b^2y$ polinomunu asal çarpanlarına ayıralım

$2a^2c^2+3abc^2+4aby+6b^2y$ polinomunda parantez önüne alınabilecek ortak çarpan, tek terimlilerin hepsinde yoktur.

Birinci ve ikinci tek terimlide en büyük ortak bölen ac^2 dir, üçüncü ve dördüncü tek terimlinin de en büyük ortak bölen $2by$ dir.

Bu nedenle birinci ve ikinci tek terimliyi, aynı şekilde üçüncü ve dördüncü tek terimliyi gruplaştıracağız. Bu şekilde şunu elde edeceğiz:

$$2a^2c^2+3abc^2+4aby+6b^2y=\left(2a^2c^2+3abc^2\right)+\left(4aby+6b^2y\right)=$$
$$=ac^2(2a+3b)+2by(2a+3b)=$$
$$=\left(ac^2+2by\right)\cdot(2a+3b).$$

Ortak çarpanı parantez önüne almadan önce, polinomun terimlerinin gruplaştırılması gerektiğini göz önüne bulundurarak, aşağıdaki ödevleri çözünüz:

3 Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $ax^2-ab^2+b^2x-x^3$; b) $ax^2-ab^2+b^2x-x^3$; c) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $16x^4-yx^3$; b) $-2xy+20ay$;

c) $21x^3b^4-14xb^3$; ç) $\frac{20}{3}x^{15}+\frac{10}{3}x^{10}-\frac{5}{3}x^5$.

2. Ortak çarpanı parantez önüne alarak, verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $2a\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)b$; b) $(2a-b)^2-2a(2a-b)$;

c) $x^2(y^2-y-1)-y^2+y+1$; ç) $b(y-4)-a(4-y)$.

3. Ortak çarpanı parantez önüne almadan önce, polinomun terimlerini gruplaştırarak verilen polinomu asal çarpanlarına ayırınız:

a) $4-a^2x^3+2ax-2ax^2$; b) $6(3x-y)^2-9x^2+3xy$;

c) $xa-3x-5a+15+ay-3y$; ç) $28ab-12ac+9c-21b$.

4. Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $x^2(x+2)+3x^2+6x-4(x+2)$; b) $-14a^3bd+7a^3b^2-14a^2cbd+7a^2b^2c$.

c) $y^3-3y^2+y+xy^2-3xy+x$; ç) $abc+a^2b^2+3a^4b^5+3a^3b^4c-ab-c$.

7. Karelerin farkı, küplerin farkı ve toplamı formüllerinden yararlanarak polinomları asal çarpanlarına ayırma

Kısa çarpma formüllerinden karelerin farkı formülünü biliyoruz:

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B).$$

Formülden görüldüğü gibi, herhangi iki tek terimlinin karelerinin farkı, onların toplamı ve farkının çarpımı gibi gösterilebilir.

Formülü kullanarak şu örneği inceleyelim:

Örnek 1

a^2-64 binomunu çarpanlarına ayıralım. Binomun a^2 ve 64 terimleri a ve 8 sayılarının birer tam karesidir. O halde $A=x$ ve $B=8$ koyarak, $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ formülünü kullanmakla:

$a^2-64=a^2-(8)^2=(a-8)(a+8)$ elde edilir.

1 Verilen binomları çarpım biçiminde yazınız:

a) $36x^2-y^2$ b) a^2-64b^2 c) $-25x^2+9$.

Karelerin farkına ait kısa çarpma formülünden yararlanmakla çözülen şu örneği inceleyelim:

Örnek 2

$4-(a-2)^2$ ifadesini asal çarpanlarına ayırınız.

Verilen $4-(a-2)^2$ ifadesi $4-(a-2)^2=2^2-(a-2)^2$ şeklinde yazılabildiğine göre, $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ formülünü kullanabiliriz. Burada $A=2, B=a-2$ ile değiştirmekle $4-(a-2)^2=2^2-(a-2)^2=(2-(a-2))(2+(a-2))=(2-a+2)(2+a-2)=(4-a)\cdot a$ elde edilir.

2 Verilen ifadeleri çarpım biçiminde yazınız:

a) $(x-3)^2-9$ b) $(2x+5)^2-(x-2)^2$ c) $9(x-1)^2-16(y+3)^2$.

Tamamen aynı şekilde küplerin farkı ve toplamı biçiminde ifadeler asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılabilir.

Bildiğimiz şu formüllerden yararlanacağız:

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$
$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).$$

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ formülünün kullanılması mümkün olan şu örneği inceleyelim.

Örnek 3 $8-a^9b^3$. ifadesini asal çarpanlarına ayıralım. $8-a^9b^3=2^3-(a^3b)^3$ olduğunu göz önünde bulundurarak, $A=2,\ B=a^3b$ koyarsak

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$, formülü gereğince:

$8-a^9b^3=2^3-(a^3b)^3=(2-a^3b)\left(2^2+2a^3b+(a^3b)^2\right)=(2-a^3b)(4+2a^3b+a^6b^2)$ elde edilir.

3 Verilen ifadeleri asal çarpanlarına ayırınız:

a) x^3y^6-125; b) $27+x^6y^3$; c) $(a+1)^3+(a-2)^3$.

❖ Bazı örneklerde polinomları asal çarpanlarının çarpımı biçiminde göstermek için farklı yöntemlere ihtiyaç duyulabilir, yani kısa çarpma formüllerinden herhangi birini kullanmadan önce, bazı ortak çarpanların parantez önüne alınması gerekebilir.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 4 Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë binomin $27x^2-3y^2$.

Nëse i shqyrtojmë anëtarët e binomit $27x^2, 3y^2$, menjëherë do të vërejmë se ata nuk janë katrorë të plotë.

Binomun $27x^2, 3y^2$ terimlerini incelersek, bunlar tam kare ifadeleri değildirler.
Halbuki, onların bir ortak böleni, yani 3 sayısı onların en büyük ortak böleni olduğunu fark edebiliriz.

O halde $27x^2-3y^2=3\left(9x^2-y^2\right)$ yazılabilir. Bu durumda şimdi $9x^2-y^2$ binomu karelerin farkıdır, yani $9x^2=(3x)^2$, $y=(y)^2$yazılabilir. Şimdi $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ karelerin farkı formülünden yararlanarak:

$$27x^2-3y^2=3\left(9x^2-y^2\right)=3\left((3x)^2-y^2\right)=3(3x-y)(3x+y)$$

elde edilir.

❖ Kısa çarpma formüllerini kullanarak, polinomları asal çarpanlarına ayırırken, çok kez polinoma ait olan tek terimlilerle ilgili önce bazı gruplaştırmalara ihtiyaç olabilir.

Örnek 5 $4x-a^2x-a^2y+4y$ polinomunu asal çarpanlarına ayırınız.

Verilen polinomun tüm tek terimlilerinden parantez önüne alınabilecek bir ortak çarpanı bulunmadığına göre, bu polinomu asal çarpanlarına ayırmak için, önce "benzer" tek terimlileri gruplaştırmalıyız.

$$4x-a^2x-a^2y+4y=\left(4x-a^2x\right)-\left(a^2y-4y\right),$$

Şimdi parantezler içindeki tek terimlilerden ortak çarpanı parantez önüne aldıktan sonra:

$$4x-a^2x-a^2y+4y=\left(4x-a^2x\right)-\left(a^2y-4y\right)=x\left(4-a^2\right)-y\left(a^2-4\right),$$

elde edilir. Bu şekilde elde edilen ifadede parantez önüne alınacak ortak çarpan yine olmadığından ötürü şu dönüşümleri yapacağız:

$a^2-4=-\left(4-a^2\right)$, oradan da

$$\begin{aligned}4x-a^2x-a^2y+4y&=\left(4x-a^2x\right)-\left(a^2y-4y\right)=x\left(4-a^2\right)-y\left(a^2-4\right)=\\&=x\left(4-a^2\right)-\left(-y\left(4-a^2\right)\right)=x\left(4-a^2\right)+y\left(4-a^2\right)=\left(4-a^2\right)(x+y),\end{aligned}$$

elde edilir. Karelerin farkı $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ formülünden:

$$\begin{aligned}4x-a^2x-a^2y+4y&=\left(4x-a^2x\right)-\left(a^2y-4y\right)=x\left(4-a^2\right)-y\left(a^2-4\right)=\\&=x\left(4-a^2\right)-\left(-y\left(4-a^2\right)\right)=x\left(4-a^2\right)+y\left(4-a^2\right)=\left(4-a^2\right)(x+y)=\\&=(2-a)(2+a)(x+y)\end{aligned}$$

elde edilir.

4 Verilen polinomu asal çarpanların ayırınız:

a) $5x^2y-20y^3$; b) $x^2+8x^5-4-32x^3$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen polinomu asal çarpanlarına ayırınız:

a) x^2-25y^2; b) $(x-3)^2-81y^2$;

c) $(x+1)^2-9(y-2)^2$; ç) $9(n-m)^2-4(n+m)^2$.

2. Verilen polinomu asal çarpanlarına ayırınız:

a) x^3-8y^3; b) $1-27x^3$; c) $64x^6-27y^3$; ç) $(a+b)^3+b^3$.

3. Verilen polinomu asal çarpanlarına ayırınız:

a) $18x-2xy^2-9+y^2$; b) $18x-2xy^2-9+y^2$; c) $a^5-a^3-a^2+1$.

4. Verilen polinomu asal çarpanlarına ayırınız:

a) $4a^3-4$; b) $8b^3+4b^2-9a^2-27a^3$; c) $81-x^4$.

8. Binomun karesi $(A\pm B)^2$ formülünü kullanarak polinomun çarpanlara ayrılışı

Kısa çarpma formüllerinden binomun karesi formülleri şunlardır:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2.$$

Bu formüllerin tersi de geçerlidir; yani formülün sağ tarafı şeklinde verilmiş olan her polinom bir binomun karesi şeklinde yazılabilir. Diğer sözlerle böyle durumlarda açık şekilde verilmiş olan polinom asal çarpanların çarpımı biçimde yazılabilir.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 1 $9x^2-6xy+y^2$ polinomunu asal çarpanlarının çarpımı biçiminde gösteriniz.

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$, formülünü göz önüne bulundurarak $9x^2-6xy+y^2$ polinomunu $(3x)^2-2\cdot 3x\cdot y+y^2$, biçiminde yazarak, A = $3x$, $B=y$ olarak alabiliriz.

Demek ki, bu polinom ikinci dereceden kuvveti alınmış bir polinomdur, yani

$9x^2-6xy+y^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot y+y^2=(3x-y)^2$.

Binomun karesi formülünü kullanırken, $A^2 \pm 2AB + B^2$, üçterimlisinde sadece birinci ve üçüncü terimin bir kare olup olmadığını, yani A^2 ve B^2 ye bakmak doğru değildir; 2AB orta terimin de sağlandığına bakmalıyız.

Örnek olarak, $9x^2 - 8xy + y^2$ polinomu için $9x^2 - 8xy + y^2 \neq (3x - y)^2$,geçerlidir, çünkü $8xy \neq 2 \cdot 3x \cdot y$ dir.

1 Verilen polinomları binomun karesi biçiminde yazınız:

a) $a^2 - 8ab + 16b^2$; b) $(a-3)^2 - 8(a-3) + 16$.

❖ Önceki derste olduğu gibi, burada da bir polinomu bir binomun karesi biçiminde yazmadan önce, çok kez polinomun tüm terimlerinden bir ortak çarpanın parantez önünde alınması gerekebilir. Şu örneği inceleyelim:

Örnek 2 $3x^2 + 6xy + 3y^2$ polinomunu asal çarpanlarına ayırınız.

Önce ortak çarpanı parantez önüne alıyoruz:

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2),$$

ondan sonra, binomun karesi formülünden yararlanarak:

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) = 3(x+y)^2.$$

elde edilir.

2 Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $5a^2 - 10ab + 5b^2$; b) $\frac{1}{2}a^2 + 4a + 8$.

❖ Ortak çarpan bulunamazsa ve binomun karesi formülünü kullanmak mümkün değilse, polinomun tek terimlilerini bir şekilde gruplaştırmayı düşünmeliyiz.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 3 $(a+2)^2 - b^2 - 1 + 2b$ polinomunu asal çarpanların çarpımı biçiminde gösteriniz

Bu örnekte görüldüğü gibi, doğrudan doğruya binomun karesi formülünü kullanamayız, daha da polinomun terimlerinden parantez önünde alınacak ortak çarpan da yoktur. Bu nedenle polinomun terimlerini gruplaştıracağız.

$$(a+2)^2 - b^2 - 1 + 2b = (a+2)^2 - (b^2 + 1 - 2b) = (a+2)^2 - (b^2 - 2b + 1).$$

Ondan sonra binomun karesi formülünü kullanarak:

$$(a+2)^2-b^2-1+2b=(a+2)^2-(b^2+1-2b)=(a+2)^2-(b^2-2b+1)=(a+2)^2-(b-1)^2,$$

elde edilir. Şimdi $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ karelerin farkı formülünü kullanmakla polinom asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılmış olacaktır:

$$(a+2)^2-b^2-1+2b=(a+2)^2-(b^2+1-2b)=(a+2)^2-(b^2-2b+1)=\underbrace{(a+2)}_{A}{}^2-\underbrace{(b-1)}_{B}{}^2=$$

$$=((a+2)+(b-1))((a+2)-(b-1))=(a+b+1)(a-b+3).$$

3 Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $(y-3)^2-x^2-4-4x$; b) $9y^2-x^2-16-8x$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

1. a) $x^2-18x+81$; b) $9a^2-3ab+\frac{1}{4}b^2$; c) $25+9b^2-30b$.

2. a) $2a^2+4a+2$; b) $\frac{1}{2}a^2+4a+8$; c) $\frac{1}{3}x^2+3-2x$.

3. a) $5a^2-10ab+5b^2-5$; b) $x^2-y^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$; c) $-1+9x^2+y^2-6xy$.

4. a) $4b^2c^2-(b^2+c^2)^2$; b) $x^2+2xy+y^2-z^2$; c) $-25y^4+20y^2x^2-4x^4$.

9. Polinomların En Büyük Ortak Böleni ve En Küçük Ortak Katı

9.1. Polinomların EBOB

24 ve 36 sayılarını inceleyelim.

24 sayısının bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, ve 24 tür.

36 sayısının bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 ve 36 dır.

24 ve 36 sayılarının ortak bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 sayıları olduğunu fark edebiliriz.

Düşününüz!

- İki sayının en büyük ortak böleni nedir?

Ortak bölenlerden en büyüğü 12 olduğuna göre, 12 sayısına en büyük ortak bölen deriz ve EBOB(24, 36) = 12 biçiminde yazıyoruz.

Tek terimlilerin de en büyük ortak böleni benzer şekilde belirtilir.

❖ **İki ya daha fazla tek terimlinin en büyük ortak böleni,** katsayısı tek terimlilerdeki katsayıların en büyük ortak böleni ve baş değeri tek terimlilerin baş değerlerinin en büyük ortak böleni olan ifadedir.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 1 $15x^3y^6$ ve $45x^2y^4$ tek terimlilerin EBOB' ini belirtiniz.

Tek terimlilerin katsayıları 15 ve 45 olduğuna göre onların EBOB' ni 15 dir, yani EBOB(15, 45) = 15.

x^3y^6 ve x^2y^4 baş değerlerine bakarsak, onların en büyük ortak böleni x^2y^4 tek terimlisidir.

Oradan EBOB (15 x^3y^6 , 45 x^2y^4) = 15 x^2y^4 elde edilir.

❖ Polinomların en büyük ortak bölenini belirtmek için, önce polinomlar asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılmalıdır.

Örnek 2 $xy(x+y)^2$ ve $y(x-y)(x+y)$ polinomlarının en büyük ortak böleni belirtiniz.

$xy(x+y)^2$ birinci polinomun bölenleri: $x, y, (x+y), (x+y)^2$ dir.

$y(x-y)(x+y)$ ikinci polinomun bölenleri: $y, (x-y), (x+y)$ dir.

Her iki polinomun ortak bölenleri: $y, (x+y)$. dir.

Buna göre, onların EBOB $\left[xy(x+y)^2, y(x-y)(x+y)\right] = y(x+y)$ dir.

Şu sonuca varabiliriz:

> ❖ **İki ya daha fazla polinomun en büyük ortak böleni,** tüm ortak bölenlerin çarpımıdır, öyle ki polinomların çarpanlara ayrılmış olduğu bu çarpanlardan, polinomlarda ortak olarak rastlanan en küçük dereceden kuvvetler alınır.

Örnek 3 $x^2 \cdot (x^2 - y)$ ve $y(x - y^2)$ polinomlarının EBOB' nini belirtiniz.

$x^2(x^2 - y)$ birinci polinomun bölenleri $x,\ x^2, (x^2 - y)$ dir;

$y(x - y^2)$ ikinci polinomun bölenleri $y, (x - y^2)$ dir.

Fark edildiği gibi, bu polinomların ortak bölenleri yoktur.

Buna göre, EBOB $\left[x^2(x^2 - y), y(x - y^2)\right] = 1$ olduğunu yazabiliriz.

> ❖ En büyük ortak böleni 1 olan polinomlara **aralarında asal polinomlar** denir.

1 Verilen polinomların EBOB' ini bulunuz:

a) $18a^4b^3c,\ 24abc^2,\ 9ab^2$; b) $a(a - 2b),\ a^2 - 4b^2,\ a^2 - 4ab + 4b^2$;

c) $25 + 9b^2 - 30b;\ 9b^2 - 25;\ 10x - 10y - 6bx + 6by.$

9.2. Polinomların EKOK' ı

6 ve 9 sayılarını inceleyelim.

6 sayısının katları: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ……

9 sayısının kuvvetleri: 9, 18, 27, 36, 45, ….

6 ve 9 sayılarının ortak katları: 18, 36, 54, ….

> Düşününüz!
>
> - İki sayının en küçük ortak katı nedir?

Onlardan en küçüğü 18 olduğuna göre, buna 6 ve 9 sayılarının en küçük ortak katı denir ve EKOK(6, 9) = 18 biçiminde yazılır.

Benzer şekilde tek terimlilerin de en küçük ortak katı belirtilir.

❖ **İki ya daha fazla polinomun en küçük ortak katı,** katsayısı tek terimlilerin katsayılarının en küçük ortak katı, baş değeri ise onların baş değerlerinin en küçük ortak katı olan tek terimlidir.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 4 $15x^3y^6$ ve $45x^2y^4$ tek terimlilerin EKOK'ını bulunuz.

Tek terimlilerin katsayıları olan 15 ve 45 sayıların EKOK'ı 45 dir, yani EKOK(15, 45) = 45.

Tek terimlilerin baş değerlerine x^3y^6 ve x^2y^4, bakarsak, onların en küçük ortak katı x^3y^6 dır.

O halde, EKOK $\left(15x^3y^6, 45x^2y^4\right) = 45x^3y^6$.

❖ Polinomların en küçük ortak katını belirtmek için, önce polinomlar asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılmalıdır.

Örnek 5 Verilen $2x(x+y)^2$ ve $3x$ polinomlarının EKOK'ını belirtiniz.

Burada her iki polinom, asal çarpanlarının çarpımı biçiminde verilmiştir.

Birinci $2x(x+y)^2$ polinomun katları: $2x(x+y)^2, 4x^2(x+y)^2, 6x(x+y)^3,$

İkinci polinom $3x$ in katları: $3x, 6x, 3x^2, 6x^2, \ldots$.

Her iki polinomun ortak katları: $6x(x+y)^2, 6x^2(x+y)^2, 6x(x+y)^3, \ldots$

O halde EKOK $\left[2x(x+y)^2, 3x\right] = 6x(x+y)^2$ dir.

Örnek 6 $2a^2x+4abx+2b^2x$, ve a^2xy-b^2xy, $3acxz+3bcxz+3adxz+3bdxz$ polinomların EBOB'ini belirtiniz.

EKOK'ı belirtmeden önce, verilen polinomları asal çarpanlarına ayırmamız gerekir.

$$2a^2x+4abx+2b^2x = 2x\cdot\left(a^2+2ab+b^2\right) = 2x(a+b)^2;$$

$$a^2xy-b^2xy = xy\cdot\left(a^2-b^2\right) = xy\cdot(a+b)(a-b);$$

$$3acxz+3bcxz+3adxz+3bdxz=3xz\cdot(ac+bc+ad+bd)=$$
$$=3xz\left(c\cdot(a+b)+d\cdot(a+b)\right)=3xz(a+b)(c+d).$$

Buna göre,

EKOK $\left[2x(a+b)^2, xy\cdot(a+b)(a-b), 3xz(a+b)(c+d)\right]=2\cdot3\cdot x\cdot y\cdot z\cdot(a+b)^2\cdot(a-b)\cdot(c+d)=$

$=6xyz(a+b)^2(a-b)(c+d)$. elde edilir.

Şu sonuca varabiliriz:

İki ya daha fazla polinomun EKOK' ını belirtmek için, polinomlar asal çarpanlarına ayrılır, ondan sonra ortak asal çarpanlardan derecesi en büyük olanlarla ortak olmayanların tümünün çarpımı alınır.

2 Verilen polinomların EKOK'ını belirtiniz:

a) $18a^4b^3c,\ 24abc^2,\ 9ab^2;$ b) $a(a-2b),\ a^2-4b^2,\ a^2-4ab+4b^2;$

c) $25+9b^2-30b;\ 9b^2-25;\ 10x-10y-6bx+6by.$

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen polinomların EKOK'ını belirtiniz:

a) $3x^4y^3z^5,\ 4x^2yz^2,\ 5x^2y;$ b) $x^2-9y^2,\ 3(x-3y),\ 9(x-3y)^2;$

c) $a^2b^2-b^4, a^4-a^2b^2, a^3b-ab^3.$

2. Verilen polinomların EKOK'ını belirtiniz:

a) $2xyz^2,\ 4x^2yz, 6x^2y^2z^3;$ b) $x^2+4xy+4y^2,\ 4x+8y, 4x^2-16y^2.$

c) $a^2-a, 1-a^2, 1+a^3, a^2+a+1.$

Verilen polinomların EBOB'i ve EKOK'ını belirtiniz:

3. a) $4a^3-4;\ 2a^2+2a+2;\ a^2x+ax+x;$

b) $x^4-16;\ 3x^2-2x-8;\ x^3-6x^2+12x-8;$

4. a) $81-x^4;\ 2x^2-7x+3;\ x^3-9x^2+27x-27.$

b) $a^2-9b^2, 4a^2-24ab+36b^2, 2a^3b-18a^2b^2+54ab^3+54b^3.$

10. Cebirsel Kesirler. Kesirlerin Genişletilmesi ve Kısaltılması

10.1. Cebirsel Kesirler

2 sayısının 3 ile bölündüğünü gösteren $\frac{2}{3}$ biçiminde bir ifadeye **kesir** denir.

Düşününüz!

- Kesrin pay ve paydasını tanımlayınız!

Bir kesrin payı ve paydası cebirsel ifade ise, örnek olarak $\frac{a}{2a-1}$ gibi, kesir **cebirseldir**.

❖ Pay ve paydası cebirsel ifade olan kesirlere **cebirsel rasyonel ifadeler** ya da **cebirsel kesirler** denir.

Cebirsel rasyonel ifadenin değerini, cebirsel ifadelerin değerinin hesaplandığı gibi yapılabilir. Bu durumda değişkenlerin yerine verilen değerler değiştirilir ve elde edilen kesirlerle gereken hesaplamalar yapılır.

Örnek 1 En basit cebirsel rasyonel ifade $\frac{1}{x}$ cebirsel ifadesidir.

Verilen tabloda x sayısına karşılık gelen $\frac{1}{x}$ ifadesinin değeriyle birleştiriniz. Cebirsel kesrin pay ve paydasında x değişkenine hangi değerler verilebildiğini ve nasıl oranda olduğunu düşününüz.

-40	1
1	0.4
-2	-0.025
100	-0.5
-0.1	0.01
2.5	-10

- $\frac{1}{x}$ cebirsel rasyonel ifadesinde x yerine 0 değeri olamaz. Neden?

○ x değişkeninin yerine, mutlak değerce artan değerler değiştirildiği durumda, $\frac{1}{x}$ cebirsel rasyonel ifadenin mutlak değerce değerleriyle ne oluyor? x değişkeninin yerine, mutlak değerce azalan değerler değiştirildiği durumda, $\frac{1}{x}$ cebirsel rasyonel ifadenin mutlak değerce değerleri artacak yoksa azalacak mıdır?

Örnek 2 $\frac{x-1}{x-2}$ cebirsel kesrinde x yerine 0, 1, 2 ve 3 değerlerinden hangileri değiştirilebilir?

○ $\frac{x-1}{x-2}$ cebirsel kesrinde, x yerine 2 değiştirildiği durumda ne oluyor?

● $\frac{2-1}{2-2}=\frac{1}{0}$, elde edilir. Halbuki 0 ile bölünme yapılması mümkün olmadığına göre, cebirsel kesrin değeri 2 için hesaplanamaz. Bu yüzden $\frac{x-1}{x-2}$ cebirsel kesri 2 sayısı için tanımlı değildir deriz.

Örnek 3 x in hangi değerleri için $\frac{2x-5}{2x-10}$ cebirsel kesri tanımlıdır?

Her cebirsel kesir, paydasını sıfır yapan sayılar için tanımlı değildir, çünkü 0 ile bölme yapılamaz. $\frac{2x-5}{2x-10}$ cebirsel kesrinde x = 5 için paydası 2x – 10 = 0 olur. Bu ise demektir ki, verilen cebirsel kesir $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ olmak üzere tüm değerler için tanımlıdır. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ kümesine **cebirsel kesrin tanım bölgesi** ya da $\frac{2x-5}{2x-10}$ **cebirsel kesrin mümkün değerleri** denir.

!

❖ Paydasını sıfır yapan sayılar hariç, cebirsel kesir tüm reel sayılar için tanımlıdır.

❖ Cebirsel kesrin tanım olduğu bölgeden değerleri değiştirmekle, cebirsel kesrin sayı değeri elde edilir. Bu nedenle sayılı kesirlere geçerli olan her özellik, cebirsel kesirlerde de geçerlidir. Sayı kesirlerinde yapılan tüm standart işlemler: toplama, çıkarma, çarpma, bölme, kuvvet işlemleri gibi her işlem cebirsel kesirlerde de aynen yapılabilir.

!

❖ $\frac{P}{Q}, Q \neq 0$ ve $\frac{S}{T}, T \neq 0$ gibi iki cebirsel kesir için, $Q \neq 0, T \neq 0$ koşuluyla $P \cdot T = Q \cdot S$ eşitliği sağlanırsa cebirsel kesirlere **eşittirler** denir ve $\frac{P}{Q} = \frac{S}{T}, Q \neq 0, T \neq 0$ biçiminde yazılır.

Şu ödevleri çözmeye çalışınız:

1 Bir foto yazıcının fiyatı 6799 denardır ve bir fotoğrafın yapılması için maliyeti 4 denardır. Şu durumlarda fotoğrafların yapılması için toplam maliyet ne kadardır?

a) 2500 fotoğraf;

b) *n fotoğraf*;

c) bir fotoğrafın toplam maliyeti 6 denardan az olması için, kaç fotoğraf yapılmalıdır?

2 Verilen cebirsel kesirlerin tanım bölgesini belirtiniz:

a) $\frac{7x+ab}{x^2-9}$; b) $\frac{a-b}{a^2+4}$; c) $\frac{2a+1}{3a-9b}$; ç) $\frac{2a-b}{a+b}$.

10.2. Cebirsel Kesirleri Kısaltma (Sadeleştirme)

İlkokulda sayı kesirlerinin nasıl kısaldığını öğrendiniz.

- $\frac{60}{126}$ kesrini kısaltalım. Bu kesrin hem paydası hem de payı çift sayılardır. O halde kesri 2 ile sadeleştirebiliriz, ondan sonra elde edilen kesir başka bir sayı ile de kısaltılıp kısaltılmadığını yoklamamız gerekir.
- İkinci yöntem, pay ve paydayı asal çarpanlarına ayırdıktan sonra kesri kısaltabiliriz.

Bu ikinci yönteme göre hareket edelim:

$$\frac{60}{126} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

Cebirsel kesirleri nasıl kısaltacağız?

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 4 $\dfrac{a+3}{39}$ cebirsel kesrini kısaltabilir miyiz?

- $a = 1$ için, kesir $\dfrac{1+3}{39} = \dfrac{4}{39}$ kesrine dönüşür ve onu kısaltamayız.

- $a = 2$ için, kesir $\dfrac{2+3}{39} = \dfrac{5}{39}$ kesrine dönüşür ve onu kısaltamayız.

- $a = 3$ için cebirsel kesir kısaltılabilir, yani $\dfrac{3+3}{39} = \dfrac{6:3}{39:3} = \dfrac{2}{13}$.

Görüldüğü gibi $\dfrac{a+3}{39}$ kesri, a nın bazı değerleri için kısaltılamaz.

!

❖ Cebirsel kesirlerin kısaltılması söz konusu olunca, cebirsel kesrin tanım bölgesinde olan tüm değerler için geçerli olmalıdır.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 5 $\dfrac{1-2b+b^2}{b^3-b^2}, b \neq 0,\ b \neq 1$ kesrini kısaltınız.

Sayı kesirlerinin pay ve paydasını asal çarpanlarının çarpımı biçiminde göstererek, kesri kolay kısaltıyorduk.

Bu yöntemi cebirsel kesirlerde de kullanacağız. Verilen kesrin pay ve paydasını, asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazdıktan sonra kısaltalım. O halde:

$$\frac{1-2b+b^2}{b^3-b^2} = \frac{(1-b)^2}{b^2(b-1)} = \frac{(-(b-1))^2}{b^2(b-1)} \overset{b\neq 1}{=} \frac{(b-1)^{\cancel{2}}}{b^2\cancel{(b-1)}} = \frac{b-1}{b^2}, b \neq 0.$$

elde edilir. Burada $b \neq 0$ ve $b \neq 1$ olduğuna göre kısaltma yapılabilir.

!

❖ Cebirsel kesirlerin, ancak pay ve paydası asal çarpanların çarpımı biçiminde yazıldığında ve onların ortak çarpanları varsa kısaltılması mümkündür. Kısaltılması gereken çarpan, sayı ya da sıfırdan farklı herhangi bir ifade olabilir.

❖ Genel olarak $\dfrac{P}{Q}, Q \neq 0$ cebirsel kesri, EKOK(P,Q) olan polinomla kısaltılır.

3 Verilen kesirleri kısaltabilir misiniz?

a) $\frac{3a+3}{39}$; b) $\frac{5a+5}{13a+13}$, $a \neq -1$.

4 Verilen cebirsel kesirleri kısaltınız:

a) $\frac{10ab^6}{14a^4b^2c^3}, a, b, c \neq 0$; b) $\frac{4-4a+a^2}{a^4-2a^3}, a \neq 0, a \neq 2$; c) $\frac{x^4-16}{x^3+4x-2x^2-8}$, $x \neq 2$.

10.3. Kesirlerin Genişletilmesi

İlkokulda kesirlerin genişletilmesini öğrendiniz.

- $\frac{4}{5}$ kesrini 3 ile genişletelim. Bu ise demektir ki, kesrin hem paydasını hem de payını 3 ile çarpmalıyız, yani $\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$.

Cebirsel kesirlerin genişletilmesini, aslında bayağı kesirlerin genişletilmesi gibi yapılacaktır.

Örnek 6 $\frac{x+1}{x-2}, x \neq 2$ kesrini $x+2, x \neq -2$ polinomuyla genişletelim.

Buna göre, kesrin payını ve paydasını $x + 2$ polinomuyla çarpmalıyız, yani
$\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}, x \neq 2, x \neq -2$ elde edilir.

Oradan şu sonuca varabiliriz:

!

❖ Cebirsel kesirleri genişletirken, pay ve paydası aynı bir polinomla çarpılır, yani. $\frac{P}{Q}, Q \neq 0$ cebirsel kesri bir $S \neq 0$ polinomuyla $\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot S}, Q, S \neq 0$ şeklinde genişletebiliriz.

❖ Cebirsel kesirleri toplarken ya da çıkarırken, kesirleri ortak paydaya dönüştürmek için kesirlerin genişletilmesine ihtiyaç vardır. Genel olarak kesirlerin en küçük ortak katıyla pay ve paydayı çarparak kesirler genişletilir.

Örnek 7 Verilen kesirlerin paydalarını eşitleyiniz: $\frac{2x^2-4x+3}{x+1}, \frac{5}{2x+2}, \frac{x}{x^2+2x+1}$.

Bunların paydalarını eşitlemek için, önce paydaların EKOK' ı belirtilir. Bunu yapmak için, paydaları asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazacağız, yani

$$x+1,$$
$$2x+2=2(x+1),$$
$$x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

O halde. EKOK $\left[x+1, 2(x+1), (x+1)^2\right]=2(x+1)^2$ elde edilir.

Buna göre . EKOK $\left[x+1, 2(x+1), (x+1)^2\right]=2(x+1)^2$ ifadesi cebirsel kesirlerin paydası olacaktır.

$$\frac{2x^2-4x+3}{x+1}=\frac{2x^2-4x+3}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{2(x+1)}=\frac{4x^3-4x^2-2x+6}{2(x+1)^2},$$
$$\frac{5}{2x+2}=\frac{5}{2(x+1)}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}=\frac{5x+5}{2(x+1)^2},$$
$$\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{x}{(x+1)^2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2x}{2(x+1)^2}.$$

Kesri genişletirken şu sonuca varabiliriz: Kesri genişleten çarpan EKOK olan ifadenin çarpanlarına aittir, fakat genişletilen kesrin paydasının çarpanlarına ait değildir.

5 Verilen kesirlerin paydalarını eşitleyin:

a) $\frac{2y}{x+y}, \frac{xy^2}{x^2-y^2}, \frac{2x-y}{y-x}$; b) $\frac{3x}{8a^2b^4}, \frac{2y^2}{24ab^5}, \frac{2x-y}{12b^3}$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen cebirsel kesirlerin tanım aralığını bulunuz:

a) $\frac{1}{x+y-1}$; b) $\frac{4-a}{2-7b}$; c) $-\frac{9y}{x^4+1}$; ç) $\frac{3x^2-5}{a^4b^4}$.

2. Verilen cebirsel kesirleri kısaltınız:

a) $\dfrac{6x^3y^2}{10x^4y^2z}, x, y, z \neq 0;$ b) $\dfrac{(2x-y)^2-(x+y)^2}{4y^2+x^2-4xy}, x \neq 2y;$ c) $\dfrac{xa^3y^3-8xy^3}{x^2a^2y^2+2x^2ay^2+4x^2y^2}.$

3. Verilen kesirlerin paydalarını eşitleyiniz:

a) $\dfrac{n}{2a^2b}, \dfrac{m}{3b}, \dfrac{p}{4ab}, \quad a, b \neq 0;$

b) $\dfrac{6a^2b}{3a^2b+6ab}, \dfrac{a^2-9}{a^2-6a+9}, \quad a, b \neq 0, a \neq 3, a \neq -2;$

c) $\dfrac{x-2y}{x^2-2xy}, \dfrac{x^2-2xy+4y^2}{4xy^2-x^3}, \dfrac{x^2-2xy+4y^2}{2x^2y-8y^3}, \quad x, y \neq 0, x \neq 2y.$

11. Cebirsel Kesirlerle İşlemler

11.1. Cebirsel Kesirleri Toplama

Aynı ya da farklı paydalı bayağı kesirlerin toplamının nasıl yapıldığını ilkokulda öğrendiniz.

Düşününüz ve cevaplayınız!
- Eşit paydalı kesirler nasıl toplanır?
- Farklı paydalı kesirler nasıl toplanır?

- Eşit paydalı kesirleri toplarken, paylar toplanır, paydalar ise aynı kalır.

  Örnek, $\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{3+2}{5}=\dfrac{5}{5}=1.$
- Farklı paydalı kesirleri toplarken, kesirler önce ortak paydaya dönüştürülür, ondan sonra ise bu gibi kesirlerin toplamı, eşit paydalı kesirlerin toplamı kuralına göre hareket edilir. Tüm kesirlerin ortak paydası, aslında paydaların EKOK'ı dır.

  Örnek, $\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{10}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{10}+\dfrac{7}{10}+\dfrac{5}{10}=\dfrac{18}{10}=\dfrac{9}{5}=1\dfrac{4}{5}$ elde edilir.
- Cebirsel kesirleri nasıl toplarız?

Cebirsel kesirlerin toplamı, bayağı kesirlerin toplamı kuralına göre yapılır.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 1 $\frac{x}{2x+1}-\frac{3-x}{2x+1}+\frac{9}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$ toplamını hesaplayalım.

Cebirsel kesirlerin hepsinin paydaları eşittir. O halde onların paylarını toplayarak pay olarak yazılır:

$$\frac{x}{2x+1}-\frac{3-x}{2x+1}+\frac{9}{2x+1}=\frac{x-(3-x)+9}{2x+1}=\frac{2x+6}{2x+1}=\frac{2(x+3)}{2x+1}, \quad x \neq -\frac{1}{2}.$$

!

❖ Paydaları farklı olan cebirsel kesirleri toplamak için, onları eşit paydalı cebirsel kesirler biçiminde dönüştürmemiz gerekir. Bu nedenle, paydaların EKOK'ını daha kolay belirtmek için, paydaların asal çarpanlarına ayrılması gerekir.

Örnek 2 $\frac{7}{2x-x^2}-\frac{4}{x^2-4}+\frac{5}{3x+6}, x \neq 2, x \neq 0, x \neq -2$ toplamını hesaplayalım.

Verilen cebirsel kesirlerin hepsinin paydaları farklıdır. Bu yüzden onların paydalarını eşitlemeliyiz. O halde, önce paydaları asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazacağız.

$$2x-x^2=x(2-x)$$
$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$
$$3x+6=3(x+2).$$

Asal çarpanlarına ayrılmış polinomlarda $2-x$ ve $x-2$ gibi ters ifadelerin olduğunu görüyoruz.

Bu nedenle, $2x-x^2=x(2-x)=-x(x-2)$ olarak yazarız.

Buna göre EKOK$\left[2x-x^2, x^2-4, 3x+6\right]=3x(x-2)(x+2)$ elde edilir.

Şimdi cebirsel kesirleri genişletebiliriz:

$$\frac{7}{2x-x^2}=\frac{7}{x(2-x)}=-\frac{7}{x(x-2)}=-\frac{7\cdot 3\cdot(x+2)}{3x(x-2)(x+2)}=-\frac{21x+42}{3x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{4\cdot 3x}{3x(x-2)(x+2)}=\frac{12x}{3x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{5}{3x+6}=\frac{5}{3(x+2)}=\frac{5x(x-2)}{3x(x-2)(x+2)}=\frac{5x^2-10x}{3x(x-2)(x+2)}.$$

Şimdi de, farklı paydalı cebirsel kesirlerin toplamı, eşit paydalı kesirlerin toplamına dönüşür, yani

$$\frac{7}{2x-x^2}-\frac{4}{x^2-4}+\frac{5}{3x+6}=-\frac{21x+42}{3x(x-2)(x+2)}+\frac{12x}{3x(x-2)(x+2)}+\frac{5x^2-10x}{3x(x-2)(x+2)}=$$
$$=\frac{-21x-42+12x+5x^2-10x}{3x(x-2)(x+2)}=\frac{5x^2-19x-42}{3x(x-2)(x+2)}.$$

1 Hesaplayınız:

a) $\frac{2x^2-4x+3}{x^3+1}-\frac{5}{2x+2}+\frac{x}{x^2+2x+1}, x\neq -1;$ b) $\frac{2}{a+4}-\frac{a-3}{16+a^2+8a}+\frac{4-a^2}{a^3+64}, a\neq -4$.

Farklı paydalı kesirlerin toplamı çok daha pratik bir yöntemle toplanabilir. Bu yöntemi a) şıkkındaki ödevin çözümünde göstereceğiz.

$$\frac{2x^2-4x+3}{x^3+1}-\frac{5}{2x+2}+\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{2x^2-4x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}-\frac{5}{2(x+1)}+\frac{x}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{(2x^2-4x+3)\cdot 2(x+1)}{2(x+1)^2(x^2-x+1)}-\frac{5(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{2(x+1)^2(x^2-x+1)}+$$
$$+\frac{2x\cdot(x^2-x+1)}{2(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{x^3+4x^2-8x+10}{2(x+1)^2(x^2-x+1)}.$$

11.2. Cebirsel Kesirleri Çarpma

Kesirlerin toplamı gibi onların çarpımını da ilkokulda öğrendiniz.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Kesirler nasıl çarpılır?

- Şu çarpımı hesaplayalım $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{8}\cdot\cancel{9}}=\frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}=\frac{1}{12}$.
- Görüldüğü gibi iki kesri çarpmak için, pay payla çarpılır ve payda paydayla çarpılır.

Benzer şekilde cebirsel kesirlerin de çarpımı yapılır, yani paylar çarpılarak pay olarak, paydalar da çarpılarak payda olarak yazılır. Bu durumda mümkünse, paylar ve paydalar asal çarpanların çarpımı biçiminde yazılırsa kesirlerin kısaltılması sağlanabilir.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 3 Şu çarpımı kısaltalım: $\frac{2a^2b}{c^2}\cdot\frac{6bc^5}{3a^3}, a,c\neq 0.$

$$\frac{2a^2b}{c^2}\cdot\frac{6bc^5}{3a^3}=\frac{2\cancel{a^2}b\cdot\cancel{6}bc^{\cancel{5}}}{\cancel{c^2}\cdot\cancel{3}a^{\cancel{3}}}=\frac{2b\cdot 2bc^3}{1\cdot a}=\frac{4b^2c^3}{a}.$$

Örnek 4 Verilen çarpımı hesaplayalım.

$$\frac{16x^2-25xy^2}{8xy-10y^2}\cdot\frac{y^2}{16x^2+40xy+25y^2}, y\neq 0, x\neq \pm\frac{5}{4}y.$$

$$\frac{16x^3-25xy^2}{8xy-10y^2}\cdot\frac{y^2}{16x^2+40xy+25y^2}=\frac{x\cancel{(4x-5y)}\cancel{(4x+5y)}}{2\cancel{y}\cancel{(4x-5y)}}\cdot\frac{y^{\cancel{2}}}{(4x+5y)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{xy}{2(4x+5y)}.$$

2 Çarpımları hesaplayınız:

a) $\left(\frac{x+y}{x^3}\right)\cdot\frac{x^5}{(x+y)^4}\cdot(y+x), x\neq 0, x\neq -y;$ b) $\frac{3a^3+3}{a^2+a}\cdot\frac{a-1}{a^2-2a+1}, a\neq 0, a\neq 1, a\neq -1.$

11.3. Cebirsel Kesirlerin Bölümü

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Kesirler nasıl bölünür?

- Şu bölümü hesaplayalım: $\frac{3}{8}:\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{1}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$

❖ Cebirsel kesirlerde de bölme işlemini yapmak için bölünen cebirsel kesir, bölen cebirsel kesrin çarpımsal tersiyle çarpılır.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 5 Verilen bölümü hesaplayınız: $\frac{x-1}{a^3} : \frac{x^2-1}{a}, a \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -1.$

Bölme işleminin kuralına göre:

$$\frac{x-1}{a^3} : \frac{x^2-1}{a} = \frac{x-1}{a^3} \cdot \frac{a}{x^2-1} = \frac{\cancel{x-1}}{a^{\cancel{3}}} \cdot \frac{\cancel{a}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{a^2(x+1)}$$ elde edilir.

3 Verilen bölümü hesaplayınız:

a) $-\frac{6x^8y}{5x^4a^3} : \frac{-8b^3x}{4a^2}, a \neq 0, x \neq 0,\ b \neq 0$;   b) $\frac{a+b}{a-5} : \frac{a-b}{2a-10},\ a \neq 5,\ a \neq b$.

❖ Cebirsel kesirleri çarpma kuralı:

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{T} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot T},\ Q, T \neq 0.$$

❖ Cebirsel kesirleri bölme kuralı:

$$\frac{P}{Q} : \frac{S}{T} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{T}{S},\ Q, T, S \neq 0.$$

11.4. Cebirsel Kesirlerin Kuvveti

Düşününüz ve cevaplayınız!

- Kesirlerin kuvveti nasıl alınır?

- $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$.
- Bir kesrin herhangi bir dereceden kuvvetini alırken, payın ve paydanın aynı dereceden kuvveti alındığını biliyorsunuz.

❖ Cebirsel kesirlerin kuvveti işlemi de tamamen aynı şekilde yapılır. Burada tek terimlilerin ve polinomların kuvvet alma işleminin kuralları uygulanacaktır.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 6 Verilen cebirsel kesrin kuvvetini alınız: $\left(-\dfrac{2xy^2}{3z^3}\right)^3$, $z \neq 0$.

Şu şekilde hareket ediyoruz: $\left(-\dfrac{2xy^2}{3z^3}\right)^3 = \dfrac{(-1)^3 \cdot (2xy^2)^3}{(3z^3)^3} = -\dfrac{2^3 x^3 y^6}{3^3 z^9} = -\dfrac{8x^3y^6}{27z^9}$.

Örnek 7 Verilen cebirsel kesrin kuvvetini alınız: $\left(\dfrac{x^2 - xy}{xy^2}\right)^2$, $x, y \neq 0$.

Önce, cebirsel kesrin pay ve paydasını asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazacağız, ondan sonra kuvvet işlemine geçeceğiz:

$$\left(\frac{x^2 - xy}{xy^2}\right)^2 = \left(\frac{x(x-y)}{xy^2}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{(y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{y^4}.$$

4 Verilen cebirsel kesrin kuvvetini alınız:

a) $\left(\dfrac{2a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2}\right)^3, a \neq -b$;   b) $\left(\dfrac{4 - 4a + a^2}{a^4 - 2a^3}\right)^2, a \neq 0, a \neq 2$.

11.5. İki Kat Cebirsel Kesirler

Düşününüz ve cevaplayınız!

- İki kat kesir, bayağı kesre nasıl dönüştürülür?

- Verilen iki katlı kesri en sade şekilde yazalım: $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{1 \cdot 9}{3 \cdot 2} = \dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2}$.
- İki katlı kesri, bayağı kesre dönüştürürken, dış terimler çarpılır ve pay olarak yazılır, iç terimler de çarpılır ve payda olarak yazılır.

Bu işlem cebirsel kesirlerde de aynıdır:

Örnek 8 $\dfrac{\dfrac{x-1}{a^3}}{\dfrac{x^2-1}{a}}$, $a \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -1$ iki kat kesri dönüştürelim:

$$\frac{\dfrac{x-1}{a^3}}{\dfrac{x^2-1}{a}} = \frac{(x-1)\cdot a}{a^3\cdot(x^2-1)} = \frac{(x-1)\cdot a}{a^3\cdot(x-1)(x+1)} = \frac{1}{a^2(x+1)}.$$

5 Verilen iki katlı kesirleri normal kesre dönüştürünüz:

a) $\dfrac{\dfrac{a+b}{3}}{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{9a}}$, $a \neq 0,\ a \neq -b$; b) $\dfrac{\dfrac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a}}{\left(\dfrac{a}{a^2-a}\right)^2}$, $a \neq 0, a \neq -1, a \neq -3$..

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Hesaplayınız:

a) $\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{2a-b}{3b}-\dfrac{3b-a}{6a}, a,b \neq 0$. b) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}+\dfrac{2b}{a}+2-\dfrac{(a+b)^2}{ab}, a,b \neq 0$.

2. Hesaplayınız:

a) $\dfrac{a}{a^2+b^2+2ab}-\dfrac{b}{b^2-a^2}+\dfrac{1}{a-b},\ a \neq \pm b$

b) $\dfrac{x-2y}{x^2-2xy}-\dfrac{x^2-2xy+4y^2}{4xy^2-x^3}+\dfrac{x^2-2xy+4y^2}{2x^2y-8y^3}, x \neq 0, x \neq 2y$

3. Hesaplayınız:

a) $a\left(1+\dfrac{a}{2b}\right)\left(1-\dfrac{a}{2b}\right):\dfrac{a^2}{2b}:\left(\dfrac{a+2b}{a}\cdot\dfrac{2b-a}{2b}\right),\ a,b \neq 0,\ a \neq \pm 2$;

b) $\dfrac{a^2+3a}{a^2-a^4}\cdot\dfrac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a}:\left(\dfrac{a}{a^2-a}\right)^2, a \neq \pm 1, a \neq -3, a \neq 0.$

c) $(x^2-y^2)\cdot\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y}-2+\dfrac{y}{x}\right), x, y \neq 0,\ x \neq y.$

4. Hesaplayınız:

a) $\left(\dfrac{x^2-2x}{x^4-4x^2}\right)^2,\ x \neq 0, x \neq \pm 2$; b) $\left(\dfrac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a}\right)^3,\ a \neq 0,\ a \neq -3$.

5. Verilen iki kat kesri normal şekle (en sade şekilde) dönüştürünüz:

$$\frac{\dfrac{a^2+3a}{a^2-a^4}}{\dfrac{a^3+6a^2+9a}{a^2+a^3}},\ a\neq 0, a\neq \pm 1, a\neq -3.$$

12. Modüler birime ait tekrarlama alıştırmaları

1. Verilen işlemleri yapınız:

a) $\left(x^3\cdot x^2\right)^3 : x^5$ b) $\dfrac{\left(x^3 : x^2\right)^3\cdot x^5}{x^4 : x^2}$.

2. Hesaplayınız:

a) $\left(3^4\right)^5 : \left(3^6\right)^3+\left[\left(3^2\right)^3\right]^2 : 3^{10}+3^0;$; b) $\left(5^7\right)^3\cdot\left(2^3\right)^7 : \left(10^8\right)^2-3^2\cdot 10^4-5^4\cdot 2^4;$

c) $2\cdot 100^5\cdot 100^3 : \left(10^3\right)^5;$ ç) $\left(5^3\cdot 5^8\cdot 2^{11}\right) : 10^{10}+\left(5^0\cdot 5^3\right)^0-2^2.$

3. $x^2y\left(-\dfrac{2}{3}xy\right)(-x)$ tek terimlisini normal şekilde dönüştürdükten sonra, katsayısını ve baş değerini belirtiniz. Bu tek terimlinin derecesi ne kadardır?

4. $2a^3bx-a^2b^2+3ab^2x-5a^2b^2+a^3bx-3ab^2x$ için $a=1$, $b=-2$, $x=-\dfrac{1}{2}$. polinomunun değerini hesaplayınız.

5. Verilen polinomu normal şekilde dönüştürünüz:

a) $(3x-2y)\left(\dfrac{4}{5}x^2+\dfrac{1}{4}xy-\dfrac{1}{4}y^2\right)-\dfrac{1}{5}x\left(12x^2-\dfrac{25}{4}y^2\right)+\dfrac{1}{2}(-y)^3;$

b) $(2a+1)\left(a^2-a+1\right)-2\left(a^2-4\right)(a+3)-3a(3-a)$.

6. Bölümleri hesaplayınız:

a) $\left(10+3x^3-7x^2+9x\right) : \left(5-3x+x^2\right)$

b) $\left(2x^3+7x+4+5x^2\right) : (1+x)$

7. Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $a^3+3a^2-4a-12$ b) $3a^3+81$

8. Verilen kesirleri kısaltınız:

a) $\dfrac{a^3-a}{a^3+2a^2+a},\ a\neq -1$ b) $\dfrac{2a^3-2}{2a^2+2a+2}$.

9. Verilen ifadeyi sadeleştiriniz:

a) $(4x-1)(4x+1)-(4x+1-y)^2+(y-1)^2+8x(1-y);$

b) $\left(a+2b\right)^2-a\left(a+4b\right)-\left(2b-1\right)^2$.

10. Hesaplayınız:

$$\left[\frac{2}{3}x^5y^5:\left(-2xy^2\right)^2+\left(\frac{1}{2}xy^8\right)^3:y^{23}+\frac{5}{6}x^3y+\frac{3}{8}x^4y:x\right]:\left(-3xy\right).$$

11. İfadeyi en sade şekilde yazınız:

$$\left(\frac{2a}{a^2+2ab}+\frac{4b}{a^2-4b^2}-\frac{b}{ab-2b^2}\right):\left(1-\frac{a^2-4b^2-2}{a^2-4b^2}\right).$$

4

BÜYÜKLÜKLERİN ORANTILIĞI

MODÜLER BİRİMİN HEDEFLERİ

Bu modüler birimini incelemekle öğrenci şu kazanımları elde etmelidir:

- Orantının bilinmeyen terimini hesaplayacaktır;
- Bileşik orantının oluşturulmasını ve pratik problemlerde uygulanmasını;
- Basit ve bileşik üçlü kuralı kullanarak pratikten ödevleri çözecektir;
- Pratik problemlerin çözümünde kesim hesabını kullanabilecektir;
- Yüzde kavramını tanımlayacaktır;
- Günlük hayattan pratik problemlerin çözümünde faiz hesabının kullanılmasını.

MODÜLER BİRİM 4’ ÜN İÇİNDEKİLERİ

1. Fiziksel Büyüklükler. Sİ Ölçü Birimleri. Somut Sayılar

- Günlük yaşantımızda çok sık: uzunluk, kütle, zaman, hız, sıcaklık, alan, hacim vb. gibi kavramlarla karşılaşıyoruz. Bu kavramların hepsi **fiziksel büyüklüklerdir.** Fiziksel büyüklük kavramı temel kavramdır ve onu tanımsız kabul ediyoruz.

- Fiziksel büyüklükler, **ölçü birimi (birim ölçüsü)** ile beraber pozitif sayı ile nitelenen ve onlarla beraber **somut sayıyı** oluşturuyorlar. Belli bir fiziksel büyüklüğün büyüklüğünü ifade eden sayıya **ölçü sayısı** denir. Örnek, 10 metre somut sayıdır ve uzunluğu ifade etmektedir. Bu örnekte 10 sayısı ölçü sayısıdır, metre ise ölçü birimidir (birim ölçüsüdür).

Fiziksel büyüklükler için, dünyada **uluslararası ölçü birimleri sistemi** kabul edilmiştir ve kısaca SI (Sistem International ifadesinin bir kısaltması) ile işaret edilir. Fiziksel büyüklüklerden yedisi tanesi **temel büyüklük** olarak ve bunların SI' de (aşağıdaki tabloda verilmiştir) karşılıkları olan temel ölçü birimleri kabul edilmiştir. Bunların dışında olan tüm büyüklükler ise **türetilmiş büyüklüklerdir.** Bunlar doğada fizik kanunları çerçevesinde temel fiziksel büyüklükleriyle tanımlanıyorlar.

Fiziksel büyüklük	**Ölçü birimi**	**Ölçü biriminin işareti**
uzunluk	metre	m
kütle	kilogram	kg
zaman	saniye	s
akım şiddeti	amper	A
termodinamik sıcaklık	kelvin	K
madde miktarı	mol	mol
ışık şiddeti	Candela	cd

Temel fiziksel büyüklükler ve ölçü birimleri tablosu

Fiziksel büyüklüklerle ilgili kabul edilen temel ölçü birimleri ile ilgili onlardan **daha küçük** ve **daha büyük ölçü birimleri** vardır. Bu ölçü birimleri, temel ölçü birimlerinin karşılık gelen **ondalık birimiyle çarpılmasıyla ya da bölünmesiyle** elde edilmiştir.

İlerdeki tabloda daha büyük ya da daha küçük ölçü birimini ifade etmek için, temel ölçü biriminin önünde yazılacak önekler gösterilmiştir.

Ön ekin adı	Sembol	Önekin sayı değeri
eksa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	K	10^{3}
deka	h	10^{2}
deci	da	10^{1}
centi	d	10^{-1}
mili	m	10^{-2}
micro	μ	10^{-3}
nano	μ	10^{-6}
pico	η	10^{-9}
femto	ρ	10^{-12}
ato	f	10^{-15}
ato	a	10^{-18}

Türetilmiş ölçü birimlerin ön ekler tablosu

Burada, kütle için daha küçük ve daha büyük ölçüm birimlerini türetirken şunu vurgulamamız gerekir: temel ölçü birimi olan kilogram (1kg = 10^3gram) yerine, ön ekler kilogramdan 10^3 defa daha küçük olan gram (g) ölçü birimine yazılır. Aynı şekilde zaman ölçü birimi nde, temel ölçü birimi olan (s) saniyeden daha büyük ölçü birimleri dakika (dak) ve saat (h) çok kez kullanılmaktadır. Bu durumda, 1 dak = 60 s ve 1h = 60 dak = 3600 s.

❖ Alan, hacim, hız, ivme, yoğunluk vb büyüklükler **türetilmiş fiziksel büyüklükler** örnekleridir. Bu büyüklüklere karşılık gelen temel ölçü birimleri: **metre kare** (m^2), **metre küp** (m^3), **metre saniyede** (m/s), **metre saniye kare** (m/s^2), **kilogram metre küp** (kg /m^3) ve temel fiziksel büyüklüklerin tanımlandığı gibi, bu ölçü birimleri de tanımlıdırlar.

❖ Daha da bilmemiz gereken, **litre** (sembolü: *l*) **hacim** ölçü birimidir. Bir litre yaklaşık 1dm^3 (**1*l* · 1 dm^3**) ile eşittir.

Örnek 1 **Somut sayılar**

a) **120m** adlandırılmış sayıdır	**120** ölçü sayısıdır	**m** ölçü birimidir
b) **15*l*** adlandırılmış sayıdır	**15** ölçü sayısıdır	**l** ölçü birimidir
c) **200m²** adlandırılmış sayıdır	**200** ölçü sayısıdır	**m²** ölçü birimidir
ç) **10m/s** adlandırılmış sayıdır	**10** ölçü sayısıdır	**m/s** ölçü birimidir
d) **90km/h** adlandırılmış sayıdır	**90** ölçü sayısıdır	**km/h** ölçü birimidir

- Temel alan temel ölçü birimi olan m^2 'ye ek olarak, ülkemizde temel ölçü biriminden büyük olan şu alan ölçü birimleri kullanılmaktadır: **ar** (sembolü: **a; 1a =100m²**), **dekar** (sembolü: **da**; **1da = 10a =1000 m²**) ve **hektar** (sembolü: **ha**; **1 ha = 10 da = 10000m²**).

Devamında çözülmüş ödevler vasıtasıyla, verilen somut sayıları daha küçük ya da daha büyük ölçü birimiyle somut sayı gibi nasıl dönüştüğünü göstereceğiz. Önce, üslü ifadelerle bazı temel işlemlerin nasıl yapıldığını kısaca hatırlayalım.

a^n – üslü ifade **a – taban** **n – üs (kuvvetin derecesi)**

$$a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n \qquad a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm} = a^{mn} = \left(a^m\right)^n \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$a^0 = 1$$

Örnek 2 Desimetre ve santimetre, kilometrenin hangi kısmıdır?

$$1\text{km} = 10^3\text{m} = 10^3 \cdot 10\text{dm} = 10^4\text{dm}$$

1 km = 10 000 dm dir. Demek ki, bir desimetre kilometrenin on binde biridir, yani

$$1\text{dm} = \frac{1}{10\ 000}\text{km} = 10^{-4}\text{km} = 0,0001\text{km}.$$

Aynı şekilde, $1\text{km} = 10^3\text{m} = 10^3 \cdot 10^2\text{cm} = 10^5\text{cm} \Rightarrow 1\text{cm} = 10^{-5}\text{km}$ dir.

Örnek 3 1m² de, kaç cm² ve mm² vardır?

1) 1m = 10 dm eşitliğinin her iki tarafının karesini alalım;

$$1\text{m}^2 = 10^2\text{dm}^2 = 100\text{dm}^2$$

bu ise demektir ki, bir metrekare 100 desimetrekareye eşittir.

2) Aynı şekilde, $1\text{m} = 10^2\text{cm}$ eşitliğinin her iki tarafının karesi alınırsa: $1\text{m}^2 = 10^4\text{cm}^2 = 10\ 000\text{cm}^2$ elde edilir, yani bir metrekare on bin santimetrekareye eşittir.

3) $1\text{m} = 10^3\text{mm}$ eşitliğinin karesini alırsak:

$$1\text{m}^2 = 10^6\text{mm}^2 = 1\ 000\ 000\text{mm}^2$$

elde edilir.

Örnek 4 Bir litrede kaç cm³ olduğunu hesaplayınız!

$1\text{l} = 1\text{dm}^3$

$1\text{dm} = 10\text{cm}$ / eşitliğin üçüncü kuvvetini alıyoruz.

$$1\text{dm}^3 = 10^3\text{cm}^3 = 1\ 000\text{cm}^3 \quad \Rightarrow \quad 1\text{l} \approx 1000\text{cm}^3$$

Örnek 5 Bir tonda kaç gram vardır, 3,5 tonda da kaç gram vardır?

$$1t = 10^3 kg = 10^3 \cdot 1000g = 10^6 g$$
$$3,5\,t = 3,5 \cdot 10^6 g = 3\ 500\ 000 g\ .$$

Örnek 6 525 g, 1t (bir tonun) hangi kısmıdır?

$$1t = 1000kg$$
$$1kg = 1000g \quad \Rightarrow \quad 1t = 10^6 g \quad \Rightarrow \quad 1g = \frac{1}{10^6} t = 10^{-6} t$$
$$\Rightarrow \quad 525g = 525 \cdot 10^{-6} t = \frac{525}{10^6} t = 0.000525t\ .$$

Örnek 7 86 cm, kaç metredir?

$1m = 100cm \quad \Rightarrow \quad 1cm = \frac{1}{100} m = 10^{-2} m$ buradan da:

$86cm = 86 \cdot 10^{-2} m = 86 \cdot \frac{1}{100} m = 0,86m$ elde edilir.

Örnek 8 80 km/h hızı, (m/s) temel ölçü birimine dönüştürerek ifade ediniz.

$$80km/h = \frac{80km}{1h} = \frac{80 \cdot 10^3 m}{3600 s} = \frac{800 m}{36 s} = \frac{800}{36} m/s \approx 22,22 m/s\ .$$

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. a) 1220 m^3, kaç dm^3 tür?
b) 1220 dm^3, kaç m^3 tür?
c) 12,60 desilitre (dl), kaç mililitre (ml) dir?
ç) 1568 mililitre (ml), kaç desilitre (dl) dir?

2. 30m/s hızı, km/h ile ifade ediniz.

3. 25kg/m^3 yoğunluğu: a) g/m^3 b) g/cm^3 ölçü birimiyle ifade ediniz.

4. 50 m^2 alanı, cm^2 ile ifade ediniz.

5. 250 000 cm^3 hacmi: a) m^3; b) litre ile ifade ediniz.

6. a) 2 saat ve 15 dakikada kaç saniye vardır?
b) 256 424 saniyede kaç saat, dakika ve saniye vardır?

7. 2 ton 35kg 6 dekagram ağırlığı kilogram ile ifade ediniz.

2. Oran ve Orantı

Günlük hayatımızda, çok kez aynı cinsten büyüklükleri karşılaştırma durumlarına rastlıyoruz.

- ❖ **Oran** ($a : b$ ya da $\frac{a}{b}$), a sayısının b sayısıyla bölümüdür. b sayısı sıfırdan farklı olmalıdır, çünkü 0 ile bölme tanımlı değildir.
- ❖ a sayısına oranın **birinci terimi**, b sayısına ise oranın **ikinci terimi** denir.

$$a : b = \frac{a}{b} \text{ - } \quad \text{oran} \quad (b \neq 0)$$

a – birinci terim $\qquad$ b – ikinci terim

- ❖ $a : b = \frac{a}{b}$ bölümünün değerine, **oranın değeri** denir ve genellikle k ile işaret edilir, yani $\frac{a}{b} = k$.
- ❖ Oran, soyut (reel) sayıdır.

Örnek 1 20 : 4 oranının değeri 5 dir, 4 : 5 oranının değeri ise 0,8 dir (karşılık gelen bölümün değeri de o kadardır).

- ❖ Değerleri eşit olan oranları **eşit oranlar** diye adlandırıyoruz.

Birinci oranın ikinci terimi, ikinci oranın birinci terimiyle eşit olan iki orandan üç terimli oran oluşturabiliriz.

- ❖ Örnek, $a : b$ ve $b : c$ oranlarından $a : b : c$ üçlü oranını oluşturabiliriz. Benzer şekilde üç terimden daha fazla terimleri olan oranlar oluşturabiliriz. Bu oranlara **sürekli (geniş) oranlar** denir, iki terimden oluşan oranlara ise **basit oranlar** denir.

$a: b$-basit oran

$a: b : c$-sürekli oran

Örnek 2 $1:2,\quad 3:4,\quad 4:3,\quad 15:20$ vb. basit oranlardır.

Sürekli oranlar: 1 : 2 : 3, 4 : 7 : 5, 2 : 5 : 11 : 15 vb.

Oranların kesirler gibi aynı özellikleri vardır. Kesirlerde kısaltma ve genişletme işlemleri yapıldığı gibi, yani pay ve paydayı sıfırdan farklı bir sayıyla çarpma veya bölme ile, oranlarda da aynı işlemleri yaparak kısaltabilir veya genişletebiliriz. Bu özellik, oranların temel özelliği olarak tanınmaktadır.

❖ **Oranların temel özelliği:** Oranın tüm terimleri sıfırdan farklı bir sayıyla çarpılır ya da bölünürse değeri değişmez.

❖ $a : b$ ve $c : d$ oranlarının değeri aynı ise, onlar arasındaki $a : b = c : d$ eşitliğe **orantı** denir. a ve d sayılarına orantının dış terimleri, b ve c sayılarına ise orantının iç terimleri denir. Oranın değeri k sayısına ise **orantı katsayısı** denir.

$a: b = c : d$ - orantı

a ve d – dış terimler b ve c – iç terimler

❖ **Orantıların temel özelliği:**

Bir orantının dış terimlerinin çarpımı, iç terimlerinin çarpımına eşittir.

$$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$$

$a : b = c : d$ orantısından ve orantıların temel özelliklerinden doğrudan doğruya şu orantılar gerekir:

$$a : c = b : d$$
$$b : a = d : c$$
$$c : a = d : b\,.$$

Orantının üç terimi bilindiği durumda, dördüncü terimi orantıların temel özelliğinden kolay bulabiliriz. Örnek $a,$ c ve d bilinen terimler , x ise orantının bilinmeyen terimi olduğunda:

$$a : x = c : d \Leftrightarrow xc = ad \Rightarrow x = \frac{ad}{c}\,.$$

elde edilir.

Örnek 3 Verilen orantıyı sadeleştirdikten sonra bilinmeyen terimi hesaplayınız:

a) $\frac{3}{2}:\frac{1}{5}=x:\frac{7}{10}$; b) $\frac{3}{5}:x=0.2:1\frac{3}{2}$.

a) $\frac{3}{2}:\frac{1}{5}=x:\frac{7}{10}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{10}=x\cdot\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{21}{20}=\frac{x}{5}\Leftrightarrow 21:x=20:5\Leftrightarrow 21:x=4:1$

Son eşitlikten 21 = 4x elde edilir. Oradan da $x=\frac{21}{4}$ elde edilir.

Orantıyı başka bir şekilde de sadeleştirebiliriz:

$$\frac{3}{2}:\frac{1}{5}=x:\frac{7}{10}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{1}=x\cdot\frac{10}{7}\Leftrightarrow\frac{15}{2}=\frac{10x}{7}\Leftrightarrow\frac{7}{2}=\frac{10x}{15}.$$

Orantıların temel özelliğini uygulamakla son orantıyı 5 ile kısaltıyoruz.

$$\frac{7}{2}=\frac{2x}{3}\Leftrightarrow\frac{7}{4}=\frac{x}{3}\Leftrightarrow x:7=3:4.$$

O halde: $4x=21$ yani $x=\frac{21}{4}$ elde edilir.

Örnek 4 Verilen orantılardan x ve y belirtinsin:

$9:x=5:7$ ve $x:y=3:10$.

Orantıların temel özelliğini uygulayarak birinci orantıdan:

$$9:x=5:7\Leftrightarrow 5x=63.$$

elde edilir. İkinci orantıya da orantıların temel özelliğini uygulayarak:

$$x:y=3:10\Leftrightarrow 10x=3y.$$

elde edilir. Birinci orantıdan elde edilen $5x=63$ eşitliğini 2 ile çarparsak $10x=126$ eşitliği elde edilir. Bunu ikinci orantıdan elde edilen eşitlikle karşılaştırmakla $3y=126\Leftrightarrow y=42$ bulunur.

!

❖ Orantıya ait her oranın değeri k sayısına (orantı katsayısı) eşit ise,
$a: x = b : y = c : z$ – eşitliği geçerlidir.

❖ Derisa vlera e çdonjërit prej raporteve te proporcioni i vazhduar është i barabartë me k (koeficienti i proporcionalitetit), në atë rast do të vlejë:

$$\frac{a}{x}=k\Rightarrow a=kx$$

$$\frac{b}{y} = k \Rightarrow b = ky$$

$$\frac{c}{z} = k \Rightarrow c = kz\,.$$

$a = kx$ ve $b = ky$ eşitliklerinden $\frac{a}{b} = \frac{kx}{ky} = \frac{x}{y}$, yani $a : b = x : y$ gerekir, diğer taraftan $b = ky$ ve $c = kz$ eşitliklerinden $\frac{b}{c} = \frac{ky}{kz} = \frac{y}{z}$, yani $b : c = y : z$ elde edilir.

Elde edilen $a : b = x : y$ ve $b : c = y : z$ orantıları bir üçlü orantı $a : b : c = x : y : z$ biçiminde yazabiliriz.

$a : x = b : y = c : z$ ve $a : b: c = x : y : z$ üçlü orantıları denktirler ve onlardan orantı katsayısı k olmak üzere $a = kx,\ b = ky,\ c = kz$ eşitlikleri elde edilir.

$$a : b : c = x : y : z$$

$$a = kx \qquad b = ky \qquad c = kz\,.$$

- Son eşitlikler, belli bir büyüklüğü, aynı koşullar altında verilen oranda birçok eşit kısımlara ayırma problemini çözmek için **taksim hesabı** diye adlandırılan yöntem çok kez kullanılmaktadır.

Örnek 5

Verilen orantılardan üçlü orantı oluşturunuz:

$a : b = 4 : 3$ ve $b : c = 7 : 8$

Her oran iki sayının bölümü olduğuna göre, verilen her iki orantı için aşağıdakiler geçerlidir:

$$a : b = 4 : 3 \Rightarrow a : b = 28 : 21$$
$$b : c = 7 : 8 \Rightarrow b : c = 21 : 24\,.$$

O halde aranılan üçlü kural

$a : b : c = 28 : 21 : 24$ olur.

Örnek 6

450 sayısını 2 : 3 : 5 : 8 oranında dört kısma ayırınız.

Bu kısımları a, b, c, d ile işaret edelim. Ödevin koşuluna göre onlar için:

$$a : b : c : d = 2 : 3 : 5 : 8 \quad \Rightarrow \quad a = 2k; \quad b = 3k; \quad c = 5k; \quad d = 8k$$
$$a + b + c + d = 450$$

geçerlidir.

İkinci eşitlikte a, b, c, d kısımlarını $2k$, $3k$, $5k$, $8k$ ile değiştirelim:

$$2k + 3k + 5k + 8k = 450 \Leftrightarrow 18k = 450 \Leftrightarrow k = 25$$

elde edilir.

Şimdi hesaplayabiliriz:

$$a = 2k = 50$$
$$b = 3k = 75$$
$$c = 5k = 125$$
$$d = 8k = 200$$

Örnek 7 Bir ziraat kooperatifinin üç ayrı yerde 12,6 hektar çayırı vardır. Bu çayırların alanları sırasıyla 2,4 : 3,2 : 2,8 oranındadır. Ziraat kooperatifinin her üç yerinde kaçar hektar çayırı vardır?

Her üç yerdeki çayırların alanını a, b ve c ile işaret edelim. Ödevin koşuluna göre şunu elde edeceğiz:

$$a : b : c = 2{,}4 : 3{,}2 : 2{,}8 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2{,}4k \qquad b = 3{,}2k \qquad c = 2{,}8k$$

$$a + b + c = 12{,}6 \qquad \Rightarrow \qquad 2{,}4k + 3{,}2k + 2{,}8k = 12{,}6$$
$$8{,}4k = 12{,}6$$
$$k = 1{,}5$$

$$a = 2{,}4k = 3{,}6$$
$$b = 3{,}2k = 4{,}8$$
$$c = 2{,}8k = 4{,}2$$

Buna göre, ziraat kooperatifin bir yerde 3,6 ha, diğer bir yerde 4,8 ha ve üçüncü yerde 4,2 ha çayırı vardır.

Örnek 8 Trayçe, Selim ve Emre 1650 denarı şu şekilde paylaşıyorlar: Selim, Trayçenin alacağı bölümün $\frac{2}{3}$ kısmını, Emre ise Trayçe ve Selimin alacakları toplam bölümün $\frac{3}{8}$ kısmını alacaktır.

Trayçe, Selim ve Emre' nin alacakları miktarları karşılıklı olarak x, y ve z ile işaret edelim. Ödevin koşuluna göre

$$x + y + z = 1650$$

geçerlidir. Buna göre alacakları miktar için şunları yazabiliriz:

Trayçe $\quad x$ denar;

Selim $\quad y = \frac{2}{3}x$ denar;

Emre $\quad z = \frac{3}{8}(x + \frac{2}{3}x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3}x = \frac{5}{8}x$ denar

Bu eşitliklerden şu orantıyı kurabiliriz:

$$x : y : z = 1 : \frac{2}{3} : \frac{5}{8} \Rightarrow x : y : z = 24 : 16 : 15$$

Son orantıdan, orantı katsayısı k olmak üzere: $x = 24k, y = 16k, z = 15k$ eşitlikleri elde edilir.

Bunları birinci eşitlikte değiştirmekle:

$$24k+16k+15k=1650$$
$$55k=1650$$
$$k=30\,.$$

elde edilir. O halde: $x=24k=720$, $y=16k=480$, $z=15k=450$ elde edilir. Demek ki, Trayçe 720 denar, Selim 480 denar ve Emre 450 denar alacaktır.

Örnek 9 Üç stajyer, kimin kaç gün çalıştığına göre 36 000 denar parayı paylaşıyorlar. Birinci stajyer ikincisinden 3 defa daha çok çalışmış, ikincisi ise üçüncüsünden 2 defa daha çok çalışmıştır. Stajyerler parayı nasıl paylaşacaklar?

Her birinin alacağı para miktarını x, y ve z ile işaret edelim. Ödevin koşuluna göre $x=3y$, oradan da $x:y=3:1$ orantısı elde edilir; aynı şekilde $y=2z$ olduğundan $y:z=2:1$ orantısı elde edilir. Bu iki orantıdan bir üçlü orantı kurmak için, birinci orantıda olan 3 : 1 oranını 2 ile genişleteceğiz. Bu şekilde $x:y=6:2$ elde edilir; bu orantı ve $y:z=2:1$ orantısıyla $x:y:z=6:2:1$ üçlü orantı elde edilir.

O halde

$$x+y+z=36000$$
$$x:y:z=6:2:1$$

elde edilir. Son orantıdan k orantı katsayısı olmak üzere: $x=6k$, $y=2k$, $z=k$ eşitlikleri elde edilir.

Bunları birinci eşitlikte yerlerine koyarsak:

$$6k+2k+k=36000$$
$$9k=36000$$
$$k=4000$$

elde edilir. Şimdi hesaplıyoruz: $x=6k=24000$, $y=2k=8000$, $z=k=4000$ bulunur. Demek ki, birinci stajyer 24 000 denar, ikincisi 8000 denar ve üçüncüsü 4000 denar almıştır.

Örnek 10 Dört kardeş, yaşlarının oranına göre 78 000 denar değerinde bir mirası şu şekilde paylaşıyorlar. En büyük kardeş mirasın en az, en küçük kardeş ise mirasın en büyük kısmını alacaktır. Kardeşlerin yaşları 26, 29, 31 ve 36 dır. Kardeşlerin anlaştıklarına göre, en küçük kardeş, en büyüğünden 2 defa daha çok ve 29 yaşındaki kardeşinden 1,2 defa daha çok alacak, 31 yaşındaki kardeş ise 29 yaşındaki kardeşten 1,5 defa daha az miktar alacaktır. Her biri kaçar para alacaktır?

Kardeşlerin payına düşecek para miktarını sırasıyla x, y, z ve t ile işaret edelim. Bu durumda en küçük kardeşin alacağı miktar x olsun. Ödevin koşuluna göre:

$$x=2t\,,\quad x=1{,}2y \quad \text{ve} \quad y=1{,}5z\,.$$

Son iki eşitlikten şu orantıları yazabiliriz:

$$x:y=1,2:1 \qquad \text{ve} \qquad y:z=1,5:1.$$

Orantıların her birinin sağ taraflarını 10 ile genişletirsek

$$x:y=12:10 \qquad \text{ve} \qquad y:z=15:10.$$

elde edilir. Son iki orantıdan bir üçlü orantı kurmak için, birinci orantının sağ oranını 1,5 ile genişleteceğiz ve bu şekilde

$$x:y=18:15 \qquad \text{ve} \qquad y:z=15:10.$$

elde edilir. Bu son iki orantıdan şu üçlü orantıyı yazabiliriz:

$$x:y:z=18:15:10.$$

$x = 2t$ koşulundan yararlanarak, yani $x : t = 2 : 1 = 18 : 9$, şu orantıyı yazıyoruz:

$$x:y:z:t=18:15:10:9.$$

Son orantıdan şu eşitlikler elde edilir:

$$x=18k; \qquad y=15k; \qquad z=10k; \qquad t=9k,$$

burada k orantı katsayısıdır.

x, y, z, t değerleri için

$$x+y+z+t=78000.$$

eşitliği geçerlidir. Bilinmeyenleri k ile ifade ederek yerlerine değiştirirsek:

$$18k+15k+10k+9k=78000$$

$$52k=78000$$

$$k=1500 \text{ elde edilir.}$$

Şimdi hesaplayabiliriz: $x=18k=27000$

$y=15k=22500$

$z=10k=15000$

$t=9k=13500$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Verilen orantıdan x belirtilsin:

a) $1225:12=225:x$ b) $1445:x=85:8$

c) $12,25:1,2=2,25:x$ ç) $14,45:x=8,5:0,8$

d) $\frac{8}{3}:\frac{2}{7}=\frac{4}{10}:\frac{x}{7}$ e) $\frac{4}{3}:\frac{2}{5}=\frac{2}{10}:x$

2. a büyüklüğü c den 4,5 defa büyük, c ise b den 1,5 defa küçük ise, a büyüklüğü b den kaç defa büyüktür (küçüktür)? (a, b, c pozitif büyüklüklerdir).

3. $b:c=3:1$ ve $\frac{c}{a}=\frac{7}{3}$ olduğuna göre a büyüklüğü b den kaç defa büyüktür (küçüktür)?

4. 3 kg şekerin fiyatı 4 kg tuzun fiyatı kadar, 6 kg tuz 8 kg unun fiyatı kadar değerli ise, kaç kilo un 9 kilo şeker kadar değerlidir?

5. Kütleleri sırasıyla 520 kg, 340 kg, 240 kg ve 750 kg olan dört farklı ürün satın alınmıştır. Onların nakli için 7 400 denar ödenmiştir. Nakliye masrafları her ürünün kütlesine göre olduğu biliniyor. Her ürünün nakliye masrafları ne kadar olduğunu hesaplayınız.

6. Bir maddenin 3 kilogramı ikinci bir maddenin 4 kilogramı kadar eder, ikinci maddenin 3 kilogramı ise üçüncü bir maddenin 4 kilogramı kadar eder. Bu maddelerin tümünün fiyatı 7400 denardır. Her maddenin fiyatını belirtiniz.

7. Bakır, çinko ve kurşundan oluşan bir alaşımda, çinkonun iki kadar ve kurşunun 22 katı kadar bakır vardır. 680 kg alaşımda her metalden kaçar kilogram vardır?

3. Doğru ve Ters Orantılık

Fiziksel büyüklükler genellikle birbirine bağlıdır. Örnek, belli bir zaman içinde geçilen yol hareketin hızına bağlıdır. Bu durumda bir büyüklüğün değeri değiştiğinde diğerinin de değeri değişmektedir.

Büyüklüklerin birbirine bağlılığıyla ilgili şunu fark edebiliriz: bazı defa birinin değeri arttığında diğerinin de değeri artar ve tersine, birinin değeri azaldıkça diğerinin de değeri azalmaktadır.

Bazı durumlarda ise tersine, birinin değeri arttığında diğerinin değeri azalmaktadır veya birinin değeri azaldıkça diğerinin değeri artmaktadır.

Örnek 1 Bir arabanın hareketinde, hızın artmasıyla belli zaman aralıklarında arabanın kat ettiği uzaklık da artmaktadır. Örnek olarak, araba 60 km/h hızla hareket ettiğinde 15 dakikada 15km yol geçecektir, fakat hızını arttırarak 80 km/h hızla hareket ederse, 15 dakikada 20 km yol geçecektir; hızı daha da arttırıp 100 km/h hareket ederse 15 dakikada 25 km yol kat edecektir.
Bu bağıntıda, hızın 60 km/h değerine, uzaklığın 15 km değeri karşılık gelir diyeceğiz; 80 km/h değerine 20 k değeri karşılık gelir vb.
Diğer taraftan, arabanın kat edeceği uzaklık sabit olduğu durumda, arabanın hareket hızının artmasıyla, kat edilecek uzaklığa gereken zaman azalacaktır. Örnek olarak, araba 100 km yolu kat ettiğinde 50 km/h hızla hareket ederse, gereken zaman 2 saattir. Araba 75 km/h hızla hareket ederse aynı mesafeyi araba 1 saat 20 dakikada kat edecektir.

!

- İki büyüklüğün herhangi iki karşılıklı değerlerinin bölümü daima sabit ise, onlara **doğru orantılı büyüklükler** denir.
- a ve b doğru orantılı büyüklüklerin karşılıklı birer değeri ise:

$$\frac{a}{b} = k \qquad \text{ya da} \qquad a = kb\,,$$

geçerlidir. k – orantı katsayısıdır.

- Doğru orantılı büyüklüklerde, birinin değeri artarsa, diğer büyüklüğün de değeri artar ve tersine, bir büyüklüğün değeri azalırsa diğer büyüklüğün de değeri azalır.

!

- İki büyüklüğün herhangi iki karşılıklı değerlerinin çarpımı daima sabit ise, onlara **ters orantılı büyüklükler** denir. a ve b ters orantılı büyüklüklerin karşılıklı birer değeri ise:

$$ab = k\,,$$

geçerlidir. k – orantı katsayısıdır.

- Ters orantılı büyüklüklerde, birinin değeri artarsa, diğer büyüklüğün değeri azalır ve tersine, bir büyüklüğün değeri azalırsa diğer büyüklüğün değeri artar.

Örnek 2 Aşağıdakilerden hangileri doğru orantılı, hangileri ise ters orantılı büyüklükler olduğunu doğrulayınız.

a) Karenin kenar uzunluğu a ve karenin çevresi;
b) Karenin kenar uzunluğu a ve karenin alanı;
c) Alanı 60 olan dikdörtgenin uzunluğu ve genişliği;
ç) Belli bir işin yapılması için, çalışma zamanı ve işçi sayısı.

a) büyüklükler **doğru orantılıdır**, çünkü karenin kenar uzunluğu arttıkça onun çevresi de artacaktır ve tersine karenin kenarının uzunluğu azaldıkça çevresi de azalacaktır;

b) büyüklükler **doğru orantılıdır**;

c) büyüklükler **ters orantılıdır**, çünkü dikdörtgenin uzunluğu arttıkça, dikdörtgenin alanı aynı kalmak için dikdörtgenin genişliği azalmalıdır ve tersine, uzunluğu azalırsa alanın değişmemesi için genişlik artacaktır.

ç) büyüklükler **ters orantılıdır**, çünkü işçilerin sayısı arttıkça, iş daha çabuk bitecektir; işçilerin sayısı azaldığı durumda, aynı işin bitirilmesi için daha fazla zamana ihtiyaç vardır.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Adamın biri pazardan domates satın almak için cebinde 240 denarı varmış. Domateslerin fiyatı 20 denar kilosu ise, bu adam o kadar parasıyla kaç kilo domates satın alacaktır? Domateslerin kilosu 30 denar olduğunda ise kaç kilo, fiyatı 40 denar olduğunda kaç kilo, 60 denar olduğu durumda ne kadar, kilosu 80 olduğunda kaç kilo domates satın alabilecektir? Domateslerin miktarı ve fiyatı arasında nasıl bağıntı vardır? Domateslerin kilogram fiyatı sabit olduğu durumda, domateslerin miktarı (kütlesi) ve ödeyeceği para miktarı arasında nasıl orantılı bağıntı vardır?

2. Bir kamyon belli bir maldan bir turda 8 ton götürebilir. Aynı özellikte 2 kamyon bir turda aynı maldan kaç ton götürebilir, 4 kamyon kaç ton, aynı maldan 7 kamyon kaç ton götürecektir? Kamyon sayısı ve taşınan mal miktarı arasında nasıl orantılı bağıntı vardır?

3. Kütlesi 30 ton olan belli bir malı, aynı özellikte olan 30 kamyon bir günde taşıyabilir. Bu kamyonlardan 15 tanesi aynı malı kaç günde taşıyabilecektir? 10 kamyon bu işi kaç günde bitirebilir, 5 kamyon kaç günde, 3 kamyon kaç günde, 2 kamyon kaç günde bu malı taşıyabilecektir? Kamyon sayısı ve malın götürülmesi için gereken gün sayısı arasında nasıl bir orantılı bağıntı vardır?

4. Aşağıdaki büyüklüklerden hangileri doğru orantılı, hangileri ise ters orantılıdır?

a) Dairenin yarıçapı ve alanı;

b) Kürenin yarıçapı ve hacmi;

c) Silindirin yüksekliği ve hacmi;

ç) Hacmi 50 olan dik dairesel silindirin yüksekliği ve tabanının yarıçapı;

d) Karenin köşegeni ve kenarı;

e) Alanı P verilmiş olan eşkenar dörtgeninin iki köşegeni.

5. Sandra, Fatime ve Yovan'ın yaşları sırasıyla 20, 30 ve 50 dir. Onlar 5000 denar parayı birbiriyle paylaşıyorlar. Aşağıda verilen koşullara göre her biri ne kadar para alacaktır:

a) paylaşılacak 5000 denarı yaşlarının oranına göre ayıracaklar;

b) paylaşılacak 3100 denarı yaşlarının ters oranı biçimde ayrılacaktır.

4. Basit Üçlü Kural

❖ İki doğru orantılı ya da ters orantılı büyüklüklerde, değişkenlerden üçü verildiğinde dördüncüsünün bulunması için kullanılan yönteme **basit üçlü kural** denilmiştir.

Basit üçlü kuralı alıştırmalarla açıklayacağız.

Örnek 1 10 traktör bir günde 120 hektarlık bir araziyi sürüyor. 15 traktör bir günde ne kadar alan sürecektir?

Karşılıklı büyüklükleri alt alta yazarak, aynı ölçü birimiyle ifade edilmelerine dikkat ediyoruz.

↑ 10 traktör	↑ 120 hektar
15 traktör	x hektar

Büyüklükler, hangi türden orantılı (doğru ya da ters) olduklarına bağlı olarak aynı yönde ya da ters yönde oklar çizilir.

Yapılan şemada oklardan biri daima bilinmeyenlerden kalkar ve yönü yukarıya doğrudur, diğeri ise orantının türüne bağlıdır. Orantı doğru ise ikinci ok birincisi ile aynı yönde çizilir, orantı ters ise ikinci ok birincisi ile ters yönde çizilir.

Verilen örnekte, traktör sayısının **artmasıyla**, bir günde sürülen arazi miktarı da **artacaktır**, demek ki söz konusu doğru orantıdır ve oklar aynı yönde olacaktır.

Okların yönlerine uyarak orantıyı oluşturuyoruz ve ondan sonra bilinmeyen terimi hesaplıyoruz:

$$x : 120 = 15 : 10$$
$$x = \frac{15 \cdot 120}{10}$$
$$x = 180.$$

Demek ki, aynı özellikte 15 traktör bir günde 180 hektar araziyi sürecektir.

Örnek 2 0,3 ton ham maddeden 57 kg nihai ürün elde ediliyor. 5,1 ton ham maddeden kaç kilogram nihai ürün elde edilecektir?

Karşılıklı büyüklükleri alt alta yazıyoruz:

↑ 0,3 ton ham maddeden	↑ 57 kg nihai ürün
5,1 ton ham maddeden	x kg nihai ürün

Daha fazla miktarda ham maddeden **daha fazla** nihai ürün elde edildiğini bildiğimize göre, büyüklükler doğru orantılıdır, dolayısıyla oklar aynı yönde çizilir.

$$x:57=5.1:0.3$$
$$x=\frac{5.1\cdot 57}{0.3}$$
$$x=969.$$

Buna göre, verilen miktarda ham maddeden 969 kg nihai ürün elde edilecektir.

Örnek 3 10 işçi verilen bir işi 12 günde bitirebilir. Aynı işi 15 işçi kaç günde bitirebilir?

$\downarrow$ 10 işçi $\qquad$ $\uparrow$ 12 gün
15 işçi $\qquad$ *x gün*

İşçi sayısının **artmasıyla** bitirilmesi gereken iş için gün sayısı **azalacaktır**. Demek ki bu durumda büyüklükler ters orantılıdır ve oklar ters yönde olacaktır.

$$x:12=10:15$$
$$x=\frac{10\cdot 12}{15}$$
$$x=8.$$

Demek ki, 15 işçi bu işi 8 günde bitirecektir.

Örnek 4 Beli bir miktar gıda ile 16 kişi 30 gün geçinebilir. Aynı miktar gıda ile 12 kişi kaç gün geçinebilir?

$\downarrow$ 16 kişi $\qquad$ $\uparrow$ 30 gün
12 kişi $\qquad$ *x gün*

Kişi sayısı azaldığında, aynı miktar yiyecekle daha fazla gün yiyecek yeteceğine göre, burada da büyüklükler ters orantılıdır ve oklar ters yönde çizilecektir. Şu orantıyı kuruyoruz:

$$x:30=16:12$$
$$x=\frac{16\cdot 30}{12}$$
$$x=40.$$

Demek ki, aynı miktar gıda ile 12 kişi 40 gün idare olabilir.

Örnek 5 Bir çiftlikte 45 baş hayvan var ve onlara 28 gün için yem hazır bulunuyor. 6 gün sonra çiftliğe daha 10 baş hayvan getiriliyor. Çiftlikte kaç gün için yem olacaktır?

İlk 6 günde sadece 45 baş hayvan yem yemiştir, demek ki daha 10 baş hayvan getirilmemiş olsaydı ilk 45 baş hayvana daha 22 gün için yem olacaktı. Şimdi, kalan yem ile 55 baş hayvana kaç gün yeteceğini hesaplamak için orantı kuracağız:

↓ 45 baş hayvan	↑ 22 gün
55 baş hayvan	x gün

Belli miktar yem ile **daha fazla** baş hayvan, **daha az** gün idare olabilir. Demek ki söz konusu ters orantıdır. O halde oklar ters yönde olacaklar. Şu orantıyı kuruyoruz:

$$x:22=45:55$$
$$x=\frac{45\cdot 22}{55}$$
$$x=18.$$

Buna göre, kalan yem miktarı 18 gün için yeterli olacaktır. İlk 6 gün harcanan yemi göz önüne bulunduruyorsak, verilen yem miktarı 24 gün idare edecektir.

Örnek 6 Sekiz işçi bir işi 24 günde bitirebilir. Halbuki 4 gün sonra üç işçi hasta raporu alarak işe gelemiyorlar. Bu işçilere yedek işçi olmadığına göre, kalan işçiler bu işi kaç günde bitirebilirler?

İşçilerden hepsi 4 gün çalıştıklarına göre, kalan işin bitirilebilmesi için daha 20 gün gerekir. Halbuki 3 işçi gittikten sonra 5 işçiye (**daha az** işçi) bu işi bitirmek için **daha fazla** güne ihtiyaç vardır.

↓ 8 işçi	↑ 20 gün
5 işçi	x gün

$$x:20=8:5$$
$$x=\frac{8\cdot 20}{5}$$
$$x=32.$$

Beş işçi kalan işi 32 günde bitirecektir, eğer önceden 8 işçinin çalıştığı 4 günü hesaba katarsak, verilen işi işçiler 36 günde bitirecektir.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Belli bir üründen 525 kg için 125 000 denar ödenmiştir. Aynı üründen 100 000 denar için kaç kilogram satın alınabilir?
2. 18 işçi verilen bir işi 30 günde bitiriyorsa, aynı şartlar altında aynı işi 1o işçi kaç günde bitirebilir?
3. 12 makine 1 saatte 20 ton meyve suyu dolduruyorsa, 9 makine 1 saatte ne kadar meyve suyu dolduracaktır?
4. 6 işçi bir işi 5 günde bitirebilir. İki gün sonra daha üç işçi katıldığına göre aynı koşullar altında aynı işi kaç günde bitirecekler?
5. 45 işçi belli bir işi 18 günde bitirebilir. 6 gün sonra 9 işçi işi bırakmıştır. İşe devam eden işçiler kalan işi kaç günde bitirecektir?

5. Bileşik Üçlü Kural

❖ Pratikte problemleri çözerken, sadece iki orantılı büyüklük değil, çok kez üç, dört, ya da daha fazla orantılı büyüklük içeren ödevlere rastlanılır. Bu büyüklüklerden herhangi birini belirtmek için kullanılan yönteme **bileşik üçlü kural** denir.

Birkaç çözülmüş alıştırma ile bileşik üçlü kuralı inceleyelim.

Örnek 1 8 işçi grup halinde günde 6 saat,18 gün çalışarak 99 000 denar kazanç elde etmişler. Aynı koşullar altında 14 işçi, günde 10 saat, 15 gün çalışırsa kazandıkları para ne kadar olacaktır?

Burada da aynı cinsten büyüklükleri alt alta yazacağız. Okları şu şekilde yönlendireceğiz: İlk ok daima x ile işaret edilen bilinmeyenden kalkar; kalan büyüklüklerin yanına, bilinmeyen ile doğru orantıda yoksa ters orantıda olduğuna bağlı olarak oklar yönlendirilir. İncelenen büyüklük bilinmeyen büyüklükle doğru orantıda ise ok bilinmeyenden kalkan ok ile aynı yönde, ters orantıda ise ok bilinmeyenden kalkan ok ile ters yönde olacaktır.

İşçi sayısı **artarsa** (8 den 14 e), kazançları da **artacaktır**, demek ki büyüklükler doğru orantıdadır ve işçi sayısı yanındaki ok, bilinmeyenden kalkan ok ile aynı yönde olacaktır (burada kalan büyüklükleri dikkate almıyoruz – gün sayısı, iş saati sayısı).

İşçilerin çalıştıkları gün sayısı **azalırsa** (18 yerine 15) kazançları **da daha** az olacaktır. Demek ki büyüklükler yine doğru orantıdadır. O halde kazanç yanındaki ok, bilinmeyenden kalkan ok ile aynı yönde olacaktır.

İşçiler günde **daha fazla** saat çalışırsa (6 saat yerine 8) kazançları da **daha fazla** olacaktır, yani bu durumda da doğru orantılı büyüklükler söz konusudur ve ok, bilinmeyenden kalkan ok ile aynı yönde olacaktır.

↑ 8 işçi	↑ 18 gün	↑ 6 saat/gün	↑ 99 000 denar
14 işçi	15 gün	10 saat/gün	x denar

Buna göre verilen koşullara göre şu dörtlü (bileşik) orantıyı oluşturuyoruz:

$$x:99000=14:8=15:18=10:6$$

oradan da:

$$x:99000=(10\cdot 15\cdot 14):(6\cdot 18\cdot 8)$$

orantısı elde ederek, orantıların temel özelliğinden yararlanarak x hesaplanır:

$$x=\frac{(10\cdot 15\cdot 14)\cdot 99000}{6\cdot 18\cdot 8}$$

$$x=240625\,.$$

Örnek 2 15 kamyon, günde 4 tur yaparak 20 günde belli bir malı taşıyabilir. İlk 10 günde 5 kamyon günde 6 tur yaparak çalışmıştır. Kalan malı öngörülen süre içinde günde 5 tur yaparak aynı özellikte daha kaç kamyona ihtiyaç vardır?

Önce şunu hesaplayalım: 15 kamyon yerine 5 kamyon, günde 4 tur yerine 6 tur yaparak belirlenen malı kaç günde taşıyacaktır.
Aynı cinsten büyüklükleri alt alta yazıyoruz.
Birinci ok x ten kalkar.

Şimdi kalan büyüklüklerin yanlarına konulacak okların yönlerini belirtelim. Malın taşınması için 15 kamyon yerine 5 kamyon, yani **daha az** kamyon çalışırsa, **daha fazla** gün gerekecektir; bu demektir ki kamyon sayısı yanındaki okun yönü başlangıç okun tersi olacaktır.

Kamyon günde **daha çok** tur yaparsa (4 yerine 6), işin bitmesi için **daha az** gün gerekecektir. Buna göre, ters orantı söz konusudur ve günde tur sayısını ifade eden büyüklüğün yanındaki okun yönü yine birinci okun yönüyle ters olacaktır.

15 kamyon	↑ 20 gün	4 tur/gün
↓ 5 kamyon	x gün	↓ 6 tur/gün

Okların yönünde hareket ederek şu üçlü orantıyı oluşturuyoruz:

$$x:20=15:5=4:6,$$

oradan da şu orantı elde edilir:

$$x:20=(15\cdot 4):(6\cdot 5),$$

oradan da x belirtilir:

$$x = \frac{(15 \cdot 4) \cdot 20}{6 \cdot 5}$$

$$x = 40 .$$

Sadece 5 kamyon çalışırsa, bu iş 40 günde biter. Bunlar 10 gün çalışmış olduğuna göre, işin bitmesi için daha 30 gün kalmıştır. İşin bitmesi için süre 20 gündür, fakat 5 kamyon zaten 10 gün çalıştığına göre, işin bitirilmesine daha 10 gün süre kalmıştır. Kalan işi bitirmek için, 5 kamyon günde 6 tur yaparak 30 günde yapacağı işi, günde 5 tur yaparak bu işi 10 günde kaç kamyon bitirebilir diye hesaplamalıyız:

↑ 5 kamyon	↓ 30 gün	↓ 6 tur/gün
x kamyon	10 gün	5 tur/gün

Bilinmeyen değeri hesaplamak için şu orantıyı oluşturuyoruz:

$$x : 5 = (30 \cdot 6) : (5 \cdot 10)$$

$$x = \frac{30 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 10}$$

$$x = 18 .$$

Öngörülen süre içerisinde kalan işi18 kamyon bitirecektir. Bu arada 5 kamyon zaten çalıştığına göre, daha 13 kamyona ihtiyaç olacaktır.

Örnek 3 Kumaş üretilen bir fabrikada, genişliği 2m olan 180m kumaş üretmek için 45 kg pamuk gerekir. 35 kg pamuktan genişliği 1,75m olan kumaştan kaç metre kumaş üretilebilir?

Aynı cinsten büyüklükleri alt alta yazalım:

↑ 180m uzunluk	↓ 2m genişlik	↑ 45kg
x m uzunluk	1,75m genişlik	35kg

Şu orantıyı oluşturuyoruz:

$$x : 180 = (2 \cdot 35) : (1{,}75 \cdot 45)$$

$$x = \frac{(2 \cdot 35) \cdot 180}{1{,}75 \cdot 45}$$

$$x = 160 .$$

35kg pamuktan 1,75m genişliğinde 160m kumaş üretilecektir.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Günde 10 saat çalışan 10 oduncu 6 günde 400 ağaç kesebilir. Günde 8 saat çalışarak 12 oduncu 10 günde kaç odun kesebilir?
2. 23 işçi 7 günde 500 denar kazanıyor. 33 işçi 11 günde kaç para kazanacaktır?
3. 3 işçi 5 günde bir üründen 385 kutu paketleyebilir. 7 işçi aynı üründen4312 kutu kaç günde paketlenebilir?
4. 450m uzunluğunda ve 5m genişliğinde bir köprüyü yapmak için 4 500 000 denar gerekir. 250m uzunluğunda ve 4m genişlikte köprünün inşaatı için kaç para gerekecektir?

6. Yüzde Kavramı. Yüzde Hesabı

Katsayı $k < 1$ olduğunda, $a : b$ ya da $\frac{a}{b}$ oranı, a sayısı b nin hangi bölümü olduğunu gösterir.

Örnek 1

25 öğrenci olan bir sınıfta 5 öğrenci pek iyidir verisi $\frac{5}{25}$ oranıyla ifade edilebilir. Bu kesri kısalttıktan sonra $\frac{1}{5}$ elde edilir. Bu oran $\frac{1}{5}$ şunu gösteriyor: Sınıfta Her 5 öğrenciden biri pek iyi başarılıdır.

Verilen çokluğun (bütünün) kısımlarını çok kez yüzdelerle ifade ediyoruz.

!

- ❖ **Yüzde bir (%1)**, bir çokluğun yüz kısmından bir kısmıdır.
- ❖ S verilen bir çokluğun bütünü ise, onun %1'i $\frac{1}{100} \cdot S$ dir, aynısının $\% p$' si $\frac{p}{100} \cdot S$ dir.

Örnek 1' de $\frac{5}{25}$, yani $\frac{1}{5}$ oranını genişletip ikinci terimini 100 yaparsak, $\frac{20}{100}$ oranını elde edeceğiz. Bunun anlamı, Sınıftaki öğrencilerin %20'si pek iyi başarılı öğrencidir demektir.

Örnek 2 Verilen kesirler: $\frac{2}{5}, \frac{13}{20}, \frac{9}{10}, \frac{27}{50}$ bir bütünün yüzde kaçı olduğunu belirtelim.Bu nedenle verilen kesirleri (oranları) paydası 100 olacak şekilde genişletiyoruz.

$\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$, $\frac{13}{20} = \frac{65}{100}$, $\frac{9}{10} = \frac{90}{100}$, $\frac{27}{50} = \frac{54}{100}$. Demek ki, bir bütünün $\frac{2}{5}$, si onun %40'ı dır, verilen bütünün $\frac{13}{20}$, ü onun % 65'i dir vb.

Örnek 3 60 sayısının %25'i, $\frac{25}{100} \cdot 60 = 15$ dir.

!

- Bir çokluğun S bütününe **baş değer** (**temel sayı**) diyeceğiz.

  Yüzdeyi p ile işaret edeceğiz.

  Verilen yüzdeye karşılık gelen bütünün kısmına **pay (yüzde pay)** diyeceğiz ve $\boldsymbol{i}$ ile işaret edeceğiz.

- Bir çokluğun bütünü %100'e karşılık geldiğini göz önüne bulundurarak, basit üçlü kuralı kullanmakla yukarıdaki üç büyüklükten (baş değer S, yüzde oranı p ve yüzde payı i) herhangi ikisi bilindiğinde üçüncüsünün hesaplanması için formüller belirtebiliriz.

↑	baş değer S	↑	%100
	yüzde payı i		% p

- Daha büyük baş değere daha büyük yüzde payı karşılık geldiğine göre, okların yönü aynıdır. Buna göre şu orantıyı oluşturabiliriz:

$$i : S = p : 100$$

oradan da şu formüller elde edilir:

$$i = \frac{S \cdot p}{100}; \qquad p = \frac{100 \cdot i}{S}; \qquad S = \frac{100 \cdot i}{p}.$$

Bu üç büyüklükten herhangi ikisi bilindiğinde üçüncüsünün hesaplanmasına **yüzde hesabı** denir.

Örnek 4 Bir konser için bilet satıcısı, her satılan biletten %5 kâr alıyor. Giriş biletinin fiyatı 700 denar ise, satıcı her satılan biletten kaçar denar kazanır?

$$S = 700, \qquad p = 5, \qquad i = ?$$

$$i = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{700 \cdot 5}{100} = 35.$$

Satıcı her satılan biletten 35’er denar kazanır.

Örnek 5 Bir kişinin aylık geliri 12 000 denardır. O her ay yeni kıyafet için 720 denar harcıyormuş. Bu kişi maaşının yüzde kaçını kıyafet için harcıyormuş?

$$S = 12\,000, \qquad i = 720, \qquad p = ?$$

$$p = \frac{100 \cdot i}{S} = \frac{100 \cdot 720}{12\,000} = 6.$$

Adam her ay maaşının %6’sını kıyafet için harcıyormuş.

Örnek 6 KDV vergisi %18 denar olan bir ürün için 450 denar KDV ödenmiştir. Ürünün temel fiyatı ne kadarmış? Vergi ile beraber ürünün son fiyatı ne kadardır?

$$i = 450, \qquad p = 18, \qquad S = ?$$

$$S = \frac{100 \cdot i}{p} = \frac{100 \cdot 450}{18} = 2\,500$$

Ürünün temel fiyatı 2 500 denar, hesaplanmış KDV ile beraber ürünün son fiyatı 2 950 denardır.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. 56 litrelik bir sıvının 12 litresi yüzde kaça karşılık gelir?

2. Fiyatı 640 denar olan bir ürüne %35 zam yapılıyor ve hemen ertesi gün aynı ürüne %25 indirim yapılıyor. İndirim yapıldıktan sonra ürünün fiyatını belirtiniz.

3. Fiyatı 825 denar olan bir ürüne %26 indirim yapılıyor ve hemen ertesi gün aynı ürüne %30 zam yapılıyor. Zam yapıldıktan sonra ürünün fiyatını belirtiniz.

4. Bir sütünün yüksekliğinin %30’u 105cm dir. Sütunun yüksekliği ne kadardır?

5. Mario kış tatilinde ev ödevi olarak 45 tane ödev çözmesi gerekir. İlk hafta 27 ödev çözmüş. Mario ev ödevlerinden hangi kısmını çözmüştür? Ödevlerin %80’ini çözmüş olması için, Mario daha kaç ödev çözmelidir?

6. Verilen bir karışım üç kısma ayrılmıştır. Birinci kısım tamamının %55'i, diğeri %25', ve üçüncüsü aynı karışımın 220 kilogramıdır. Bu karışımın tümü kaç kilogram olduğunu, birinci ve ikinci kısımları da kaçar kilogram olduğunu hesaplayınız.

7. Bir yoklama testinde öğretmen öğrencilerine üç ödev vermiştir. Öğrencilerden %12's, hiçbir ödevi çözememiş, %32'si bir ya da iki ödev çözmüş ve 14 öğrenci tüm ödevleri çözmüş. Sınıfta kaç öğrenci yoklama testi yapmıştır? Kaç öğrenci bir ya da iki ödev çözmüştür, kaç öğrenci ise hiçbir ödevi çözmemiştir?

7. Çoklukları Belli Yüzde İle Arttırma-Azaltma Hesaplamaları

Yüzdelerle ilişkili çeşitli problemlerde çok kez temel değerin belirli bir yüzde için arttırılmış ya da azaltılmış değeri veriliyor ve bu durumda temel değerin ne kadar olduğu bilinmiyor. Böyle durumlarda temel değerin belli bir yüzde için arttırılmış ya da azaltılmış olduğunda temel değerin belirtilmesine **çoklukları belli yüzde ile arttırma – azaltma hesaplamaları** diyeceğiz.

Günlük hayatta çoklukları belli yüzde ile arttırma ya da azaltma hesaplamalarıyla çözülen pratik problemlere rastlıyoruz. Bu gibi örneklere marketlerde, pazarlarda, elbise dükkanlarında, taşınılmaz vb. çeşitli ürünlerin fiyatların arttırılmasında ya da indirilmesinde rastlıyoruz. Her ailenin aylık harcamaları daima değişiyor (artar ya da azalır) bu gibi problemlerde de yüzde hesaplamalara ihtiyaç duyulur. Ticarette de kârın arttırılması veya azalmasında yüzde hesaplamalardan yararlanılır. Güncel hayatımızda bu gibi örnekler çoktur, bu yüzden yüzde hesaplamaların incelenmesi çok önemlidir.

- ❖ S temel değeri %100' e karşılık geliyor. Bu değer %p artarsa, aynısına yüzde payı i karşılık geldiğini varsayarak temel değerle $(S + i)$ olur ve ona %$(100 + p)$ karşılık gelir. Dolayısıyla, basit üçlü kuralı kullanarak şu orantıyı oluşturabiliriz:

$$\uparrow \begin{array}{l} S \\ (S+i) \end{array} \qquad \uparrow \begin{array}{l} 100\% \\ (100+p)\% \end{array}$$

$$(S+i):S=(100+p):100$$

$$100\cdot(S+i)=S\cdot(100+p)$$

$$S=\frac{(S+i)\cdot 100}{(100+p)}.$$

Son formülle, belli yüzde ile arttırma yüzde hesabını çözüyoruz..

❖ Benzer şekilde S temel değeri $\%p$ azalırsa, aynısına yüzde payı i karşılık geldiğini varsayarak temel değerle (S - i) olur ve ona %(100 - p) karşılık gelir. Dolayısıyla, basit üçlü kuralı kullanarak şu orantıyı oluşturabiliriz:

$$\begin{array}{ll} \uparrow S & \uparrow 100\% \\ (S-i) & (100-p)\% \end{array}$$

$$(S-i):S=(100-p):100$$
$$100\cdot(S-i)=S\cdot(100-p)$$
$$S=\frac{(S-i)\cdot 100}{(100-p)}.$$

Son formülle, belli yüzde ile azaltma yüzde hesabını çözüyoruz.

Örnek 1 Kahvenin fiyatına %8 zam yapılarak fiyatı 3132 denar olmuştur. Zam yapılmadan önce kahvenin fiyatı ne kadarmış ve yapılan zam kaç paraymış?

Zam yapılmadan önce kahvenin fiyatı S ise (yapılan %8 zamdan önce temel değer), zamdan sonra 3132 denar, $S+i$ =3132 ve 100 + p =108 olur ve yüzde ile arttırma yüzde hesabının formülüne göre:

$$S=\frac{(S+i)\cdot 100}{(100+p)}=\frac{3132\cdot 100}{108}=2900.$$

elde edilir. Zam yapılmadan önce kahvenin fiyatı 2 900 denarmış. Fiyat 3132 – 2900 = 232 denar artmıştır, bu ise 2 900 denarın %8 ‘i dir (yoklayınız).

Örnek 2 Bir entarinin dikişinde defolu olduğu tespit edildikten sonra fiyatına %12 indirim yapılmış ve şimdiki fiyatı 1 056 denar olmuştur. Entarinin ilk fiyatı ne kadarmış?

Burada temel değerin %12 azalması söz konusudur, yani yüzde ile azaltma hesabıdır.

$$S-i=1056, \qquad 100-p=100-12=88$$
$$S=\frac{(S-i)\cdot 100}{(100-p)}=\frac{1056\cdot 100}{88}=1200,$$

İndirim yapılmadan önce entarinin fiyatı 1200 denar olduğunu bulduk. Entariye 1200 – 1056 = 144 denar indirim yapılmış ve bu sayı 1200 denarın %12’ sidir (yoklayınız).

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Bir imalathanede çalışanların maaşlarına %18 zam yapıldıktan sonra maaş 28 320 denar olmuştur. Zammın ne kadar olduğunu hesaplayınız; zamdan önce çalışanların maaşı ne kadarmış?

2. Öğrenci formaları diken bir konfeksiyonda çalışanlar normu %15 aşarak 368 forma dikmişler. Konfeksiyonda norm ne kadarmış?

3. Geçen okuma yılında bir orta öğrenim okulunda birinci sınıfta 104 öğrenci kayıt yapmış ve bu okuma yılında yapılan kayıtlara göre %20 daha az imiştir. Bu okuma yılında orta öğrenim okulunda birinci sınıfta kaç öğrenci kayıt yapmıştır?

4. Geçen yıl eylül ayında bir yerleşim yerinde haftada ortalama $44 l/m^2$ yağış olmuş ve ekim ayına göre yağış %5 daha azmış. Ekim ayında haftada ortalama yağış ne kadarmış?

5. Bir bisikletin fiyatı %18 vergisiyle beraber 10 000 denardır. Bisikletin fabrika fiyatı ne kadardır ve vergisi ne kadardır?

6. Pazar günü çalışmayan bir fırın, cumartesi günü 4 620 ekmek üretmekle, diğer günlere göre %65 daha fazla ekmek üretmiştir. Fırında hafta içi her gün kaçar ekmek pişirilir?

7. Yaz aylarında bir fırında günde 2795 ekmek üretiliyor ve bu miktar yılın diğer aylarına kıyasen günde üretilen ekmek sayısından %14 daha azdır. Fırında yılın diğer aylarında günde kaçar ekmek üretiliyormuş?

8. Faiz Hesabı

Faiz hesabı en çok tasarrufta ve borçlanmalarda kullanılır. Belirli bir zaman için, bankaya ya da herhangi bir tasarruf kuruluşuna para yatırdığımızda, onlar bizim paramızı kullanır ve bunun karşılığı olarak bize **faiz** denen belli bir ücret verir. Buna benzer olarak borçlanmada da karşılaşılır. Bu durumda banka, belli bir süre için kullanılacak parayı borç olarak verir ve bunun karşılığında belli bir faiz alır.

!

- Yatırılan ya da borç alınan para miktarına **kapital** ya da **ana değer** denir. Bunun karşılığı olarak alınan ya da verilen ücrete **faiz** denir. Ödenmesi gereken faiz, belli bir zaman süresinde genellikle ana değerin (kapitalin) belli bir yüzdesine verilir ve bu yüzdeye **faiz oranı** denir.

Örnek, belli bir mevduat için yılda %3 faiz hesaplandığı durumda, yatırıldıktan bir yıl sonra toplam faiz, mevduatın %3 değerine tekabül eder.

Örnek 1 Bankaya yılda %2,8 faiz oranı ile mevduat olarak yatırılan 75 000 denar, bir yılda faiz olarak $\frac{2,8}{100} \cdot 75\,000 = 2100$ denar ödenecektir. Bankadan yılda %6,8 faiz ile borç (kredi) olarak alırsak bir yıl sonunda $\frac{6,8}{100} \cdot 75\,000 = 5100$ denar faiz ödenecektir.

Borçlanmalarda ve tasarruflarda, tam bir yıl yerine çok kez borçlanmayı veya tasarrufları birkaç ay için, ya da birkaç yıl için yapıyoruz ve bu durumda faiz bir yıl için değil, belli zaman aralıkları için hesaplanmalıdır. Böyle durumda faiz, yatırımın süresi olan zaman aralığına ve mevduatın ya da borcun miktarına bağlı olacağı açıktır. Yatırımın (borcun) süresi ne kadar fazla ise, faiz de o kadar fazla olacaktır; aynı şekilde yatırım (borç) miktarı ne kadar büyük ise faiz miktarı da o kadar büyük olur. Bütün bunlardan şu sonuca varıyoruz: Toplam faiz miktarı, yatırılan mevduat miktarı ve yatırımın (borcun) süresi ile doğru orantıdadır.

!

- Kapitali (ana değeri) K ile, belli zaman aralığında (bir yıl, bir ay) faiz oranını p ile işaret edersek, yukarıdaki örnekte olduğu gibi, belli bir aralık birimi için (örnek 1 yıl) i ile işaretleyerek hesaplanan faiz miktarı $i = \frac{p}{100} \cdot K$ olacaktır. Zaman aralığı t ise (örnek t yıl), o döneme ait toplam faiz miktarı:

$$i = \frac{p}{100} \cdot K \cdot t = \frac{p \cdot K \cdot t}{100}$$

olacaktır.

- Son formülden, herhangi üç büyüklük bilindiğinde baş değerin, faiz oranın ya da zamanın formülleri kolay belirtilir:

$$K = \frac{100 \cdot i}{p \cdot t} \qquad p = \frac{100 \cdot i}{K \cdot t} \qquad t = \frac{100 \cdot i}{p \cdot K}$$

❖ Belli bir zaman t için faiz miktarını bu şekilde hesaplarken, sadece baş değerin faizinin hesaplandığını kaydedelim. Bu faize **basit faiz** denir, bu hesaplamaya ise **basit faiz hesabı** denir.

Yatırım sırasında, birinci yılın sonunda (birinci zaman birimi) elde edilen faiz miktarını birinci yılın temel değerine katmakla, temel değer artacak ve bu durumda ikinci yıl için hesaplanan faiz miktarı da artar, çünkü daha büyük temel değere faiz hesaplanmaktadır. Ondan sonra ikinci yılın temel değerine ikinci yılın faizini katarsak, üçüncü yılın faizi daha da büyük olan temel değere hesaplanır ve daha büyük faiz elde edilir vb. Bu şekilde belirli bir t zaman süresinde toplam faiz miktarının hesaplanmasına **bileşik faiz hesabı** denir.

İlerdeki alıştırmalarda elde edilen faiz miktarı, sırada gelen yılın temel değerine katılmadığını varsayacağız, yani basit faiz hesabı söz konusudur.

Örnek 2 132 000 denar olan bir tasarruf mevduatına %2,2 faiz oranıyla 5 yılda toplam faiz miktarı ne kadardır?

Verilen büyüklükler: $K = 132\,000$, $t = 5$, $p = 2{,}2$ dir. 5 yıl için toplam faiz miktarı i için,

$$i = \frac{p \cdot K \cdot t}{100} = \frac{2{,}2 \cdot 132\,000 \cdot 5}{100} = 14\,520$$ denar olduğunu buluyoruz.

Örnek 3 Yıllık faiz oranı %2,5 olmak üzere 12 500 denar faiz elde etmek için kaç denar yatırım yapılmalıdır?

Burada verilenler: $p = 2{,}5$, $t = 4$, $i = 12\,500$; hesaplanması gereken temel değer K (kapital) dır. Temel değere ait formülü kullanıyoruz:

$$K = \frac{100 \cdot i}{p \cdot t} = \frac{100 \cdot 12\,500}{2{,}5 \cdot 4} = 125\,000,$$

demek ki, verilen koşullara göre istenilen faiz miktarını elde etmek için 125 000 denar yatırım yapmalıyız.

Örnek 4 Yıllık %8 faiz oranıyla alınan 60 000 denarlık borç kaç yılda ödenmelidir ki, toplam faiz miktarı 12 000 denar olsun?

Verilenler: $K = 60\,000$, $p = 8$, $i = 12\,000$; hesaplanması gereken süre t:

$$t = \frac{100 \cdot i}{p \cdot K} = \frac{100 \cdot 12\,000}{8 \cdot 60\,000} = 2{,}5$$

Demek ki, borcu ödemek için 2,5 yıl zaman gerekir.

Pratikte, tasarruf ve borçlanmalarda belirli bir zaman aralığında, belli bir faiz oranıyla verilen mevduata (ya da alınan borç için) birkaç ay ya da gün için faiz miktarının hesaplanması gerekir.

- **Verilen yıllık faiz oranıyla bir aylık faizin** hesaplanması durumunda, yıllık faizi 12 aya bölüyoruz ve bu durumda şu formülü kullanacağız:

$$i=\frac{K\cdot p}{100\cdot 12}.$$

- m **aylık faizin** hesaplanması gerektiği durumda şu formülü kullanacağız:

$$i=\frac{K\cdot p\cdot m}{100\cdot 12}.$$

- Belirli sayıda aylar için elde edilen faiz miktarı bilindiği durumda, bu formülden diğer büyüklüklerin hesaplanması için aşağıdaki formülleri kolay elde edebiliriz:

$$K=\frac{1200\cdot i}{p\cdot m};\qquad m=\frac{1200\cdot i}{K\cdot p};\qquad p=\frac{1200\cdot i}{K\cdot m}.$$

Örnek 5 Yıllık %4 faiz oranıyla 108 000 denar yatırılan mevduat 4 ayda ne kadar faiz getirir?

$$K=108000,\ \ p=4,\ \ m=4$$

$$i=\frac{K\cdot p\cdot m}{100\cdot 12}=\frac{108000\cdot 4\cdot 4}{1200}=1440.$$

4 aylık faiz miktarı 1440 denardır.

Örnek 6 Yatırılan 40 000 denar, hangi faiz oranıyla 18 ayda 3600 denar faiz getirecektir?

$$K=40000,\ \ m=18,\ \ i=3600$$

$$p=\frac{1200\cdot i}{K\cdot m}=\frac{1200\cdot 3600}{40000\cdot 18}=6.$$

Yıllık faiz oranı %6 olmalıdır.

Örnek 7 %8 faiz oranıyla alınan 72 000 denarlık borç için toplam 2 400 denar faiz ödendiğine göre, borç kaç ayda ödenmiştir?

$K = 72\,000, \quad p = 8, \quad i = 2\,400$

$$m = \frac{1200 \cdot i}{K \cdot p} = \frac{1200 \cdot 2\,400}{72\,000 \cdot 8} = 5 .$$

Borç 5 ayda ödenmiştir.

- **Verilen yıllık faiz oranıyla bir günlük faizin** hesaplanması durumunda, yıllık faizi miktarını 365 güne bölüyoruz ve bu durumda şu formülü kullanacağız:

$$i = \frac{K \cdot p}{100 \cdot 365} .$$

- ***d* gün için faizin** hesaplanması gerektiği durumda şu formülü kullanacağız:

$$i = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot 365} .$$

- Burada şunu da belirtelim (bankanın tutumuna bağlı olarak), bazı durumlarda günlük faiz miktarını hesaplarken onu 365 ile bölecek yerde, yıllık faiz 365 ile bölünür.
- Zaman süresi verilmiş fakat tam hangi aylar olduğu belirlenmiş olmadığı durumlarda da aylar 30 gün sayılacaktır. Tam hangi aylar olduğu bilindiğinde, o ayların gün sayısına göre hesaplama yapılacaktır.

Belirli sayıda günler için faiz miktarı bilindiğinde, kalan büyüklükleri şu formülleri kullanarak kolay hesaplayabiliriz:

$$K = \frac{36\,500 \cdot i}{p \cdot d}; \qquad d = \frac{36\,500 \cdot i}{K \cdot p}; \qquad p = \frac{36\,500 \cdot i}{K \cdot d} .$$

Örnek 8 %3,2 yıllık faiz oranıyla, 125 günde 1000 denar faiz miktarı elde etmek için, denar olarak ne kadar para yatırılmalıdır?

$p = 3.2, \quad d = 125, \quad i = 1000$

$$K = \frac{36\,500 \cdot i}{p \cdot d} = \frac{36\,500 \cdot 1000}{3,2 \cdot 125} = 91250 .$$

91 250 denar para yatırılmalıdır.

Örnek 9 29 temmuzdan 2 kasıma kadar yatırılan 10 950 denar mevduat 114 denar faizi getirmek için, hangi yıllık faiz oranıyla yatırılmalıdır?

$K=10950$, $i=114$, $d=2+31+30+30+2=95$

$$p=\frac{36500\cdot i}{K\cdot d}=\frac{36500\cdot 114}{10950\cdot 95}=4.$$

Yıllık faiz oranı %4 olmalıdır.

- Pratikte çok kez kapital (temel değer) ve faiz miktarını toplam borç gibi sayarak ayrı ayrı verilmiyor, yani bu durumda $K+i$ biliniyor. Bu gibi büyüklüklerin her birinin hesaplanmasına **belli yüzde ile arttırma** denir.
- Bu durumda temel değer $K=\dfrac{(K+i)\cdot 100}{100+p\cdot t}$ formülüyle hesaplanır, faiz miktarı ise $i=\dfrac{(K+i)\cdot p\cdot t}{100+p\cdot t}$ formülüyle hesaplanacaktır. Burada t faizi hesaplanması gereken yılın zaman aralığıdır.
- Kapital ve faiz miktarını farkı verildiğinde, yani $K-i$, diğer büyüklüklerin hesaplanmasına **belli yüzde ile azaltma** denir.

  Aynılarını şu formüllerle hesaplayacağız: $K=\dfrac{(K-i)\cdot 100}{100-p\cdot t}$ ve $i=\dfrac{(K-i)\cdot p\cdot t}{100-p\cdot t}$.

Örnek 10 %12,5 yıllık faiz oranıyla alınan borç için, iki yılda toplam 325 500 denar ödenmiştir. Borç ve faiz miktarının ne kadar olduğunu hesaplayalım.

$$K+i=325500,\ t=2,\ p=12,5$$

$$K=\frac{(K+i)\cdot 100}{100+p\cdot t}=\frac{325500\cdot 100}{100+12,5\cdot 2}=264000;$$

$$i=\frac{(K+i)\cdot p\cdot t}{100+p\cdot t}=\frac{325500\cdot 12,5\cdot 2}{100+12,5\cdot 2}=65100.$$

Örnek 11 Bir borç için ödenmesi gereken dört aylık faiz miktarını çıkararak, borç veren 152 500 denar almıştır. Faiz oranı %5 olduğuna göre, borcun ne kadar olduğunu hesaplayınız.

$$K-i=152500\,,\quad t=\frac{1}{3}\,,\quad p=5$$

$$K=\frac{(K-i)\cdot 100}{100-p\cdot t}=\frac{152500\cdot 100}{100-5\cdot\frac{1}{3}}=155084,75\,;$$

$$i=\frac{(K-i)\cdot p\cdot t}{100-p\cdot t}=\frac{152500\cdot 5\cdot\frac{1}{3}}{100-5\cdot\frac{1}{3}}=2584,75\,.$$

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. 9 000 denarlık bir mevduat 5 yılda 2 700 denar faiz getirdiğine göre, faiz oranı ne kadardır?

2. %7,5 yıllık faiz oranıyla 124 000 denarlık bir mevduat kaç yılda 18 600 denar faiz getirecektir?

3. %9 yıllık faiz oranıyla 15 ayda 3 744 denar faiz elde etmek için ne kadar para yatırılmalıdır?

4. %4,5 yıllık faiz oranıyla 2 yıl üç ay on beş gün zamanında 16 500 denar faiz getirmek için ne kadar para yatırılmalıdır?

5. 80 gün için, %6 faiz oranıyla, alınan 36 500 denar borç için, ne kadar faiz ödenecektir?

6. %4,5 yıllık faiz oranıyla, 60 000 denar mevduat kaç günde 2 700 denar faiz getirir?

7. Bir bankaya %3,6 yıllık faiz oranıyla 250 000 denar yatırılmıştır. Banka 32 ay için ne kadar faiz ödeyecektir?

8. Yıllık faiz oranı %4,2 olan bir kredinin ödenmesi için, 16 ay süre içinde toplam 58 080 denar ödenmiştir. Kredinin temel değeri ne kadar olduğunu ve faiz miktarının ne kadar olduğunu hesaplayınız.

9. Faiz miktarını çıkararak, 110 günde ödenmesi gereken bir borç için 147 250 denar ödenmiştir. Faiz oranı %6 olduğuna göre, borcun ve faiz miktarının ne kadar olduğunu hesaplayınız.

10. %6 yıllık faiz oranıyla 75 gün süre içinde, bir kişinin tasarruf hesabının bakiyesi 121 500 denar olmuştur. Tasarruf mevduatının temel değeri ne kadar olduğunu ve ne kadar faiz ödendiğini hesaplayınız.

9. Modüler Birime Ait Tekrarlama Alıştırmaları

1. Matematik yarışmasında birinci ödülü kazanan üç öğrenci, 100 000 denar parayı kazandıkları puan sayısının oranına göre paylaşıyorlar. Birinin puanı 92, ikincisinin puanı 95 ve üçüncüsünün puanı100 olduğuna göre her öğrencinin aldığı parayı belirtiniz.
2. 2 ton 458 kilogram bir malın nakli için 11 061 denar ödenmiştir. Naklin ücreti malın ağırlığıyla doğru orantıda olduğuna göre, aynı malın 4 tonun nakli için kaç para ödenmelidir?
3. 12 işçi günde 8 saat çalışarak16 günde 11 061 denar kazanmıştır. Aynı koşullarda 15 işçi günde 9 saat çalışarak10 günde kaç para kazanacaktır?
4. Her biri 6 ton kapasiteli 10 kamyon günde 4 tur yaparak belli bir malı 8 günde taşıyorlar. Aynı malı 8 ton kapasiteli 6 kamyon günde 5 tur yaparak kaç gün taşıyacaktır?
5. Fiyatı 8 500 denar olan bir ürüne %12 indirim yapılmıştır. Ürünün yeni fiyatı ne kadar olacaktır ve kaç para ucuzlamıştır?
6. Bir malın taşınması sırasında %0,5 kayıp kabul edilir. Kütlesi 12 500 kg olan bir malın taşınmasında ne kadar kayıp kabul edildiğini hesaplayınız.
7. Bir şirkette işçilerin maaşına %15 zam yapılacaktır. Şimdiki maaşı 18 000 denar olan bir işçinin zamlı maaşı ne kadar olacaktır? Şimdiki maaşı 21 000 denar olan diğer bir işçinin de maaşı ne kadar olacaktır?
8. Mevcudu 32 öğrenci olan bir sınıfta, okuma yılı sonunda 12 öğrenci pek iyi başarılı, 8 öğrenci çok iyi, 6 öğrenci iyi ve 4 öğrenci memnun edici başarıyla sınıfı geçmiştir. Sınıf mevcudunun yüzde kaçı pek iyi, kaçı çok iyi, kaçı iyi ve kaçı memnun edici başarıyla sınıfı geçtiğini hesaplayınız.
9. Bir tankta 37,4 ton sıvı doldurulmuş ve tankın %6,5'i boş kalmıştır. Tankın tamamının dolması için daha ne kadar sıvıya ihtiyaç vardır?
10. %1,1 yıllık faiz oranıyla 9 ay için elde edilmesi gereken faiz, % 0,9 faiz oranıyla 2 yılda elde edilen faiz miktarı kadar olması için ne kadar kapital (para) yatırılması gerekir?
11. Kaç yılda 150 000 denar %3 yıllık faiz ile elde edilen faiz miktarı, 100 000 denar borcun %4,5 faiz oranıyla 4 yılda ödenmesi için yazılan faiz miktarı ile aynı olacaktır?

5

LİNEER (BİRİNCİ DERECE) DENKLEMLER VE BİR BİLİNMEYENLİ LİNEER EŞİTSİZLİKLER SİSTEMLERİ

MODÜLER BİRİMİN HEDEFLERİ

Bu modüler birimini incelemekle öğrenci şu kazanımları elde etmelidir:

- bir bilinmeyenli lineer (birinci derece) denklemleri çözmelidir;
- birinci derece parametreli denklemlerin çözümlerini, parametrenin değerlerine göre inceleyebilmelidir;
- bir bilinmeyenli lineer denkleme dönüşen pratik problemleri çözmelidir;
- Lineer eşitsizliği çözebilecek ve çözümleri analitik şekilde ve sayı doğrusu üzerinde grafiksel şekilde göstermelidir;
- bir bilinmeyenli iki lineer eşitsizlikler sistemini ve bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikler sistemlerin birleşimini çözmelidir ve çözümleri grafiksel şekilde sayı doğrusu üzerinde göstermeyi bilmelidir.

MODÜLER BİRİM 5'İN İÇİNDEKİLERİ

1. Lineer (Birinci Derece) Denklem Kavramı

1.1. Cebirsel Denklem

- $-2x+5;\ 3a^2b;\ \frac{3x^2}{2}-7y$ gibi ifadeler, değişkenli cebirsel ifadelerdir..
- $x-6=1$ eşitliği hangi türdendir?
- $x=7$ için $x-6=1$ denklemi doğru eşitliğe dönüşür mü?

Lineer denklem kavramını tanımlamak için, önce cebirsel denklem ve cebirsel denklemin çözümü kavramını tanımlayacağız.

!

- A ve B iki cebirsel ifadeden en az birinde değişken varsa, $A = B$ eşitliğine cebirsel denklem denir. Cebirsel denklemde bulunan değişkenlere bilinmeyenler denir.

Örnek 1. $A=3x^2-2$ ve $B=\frac{x+5}{2x-1}$ iki cebirsel ifade ise, $3x^2-2=\frac{x+5}{2x-1}$ eşitliği bir bilinmeyenli denklemdir.

- iki, 3 ve daha fazla bilinmeyenli denklemler de oluşturabiliriz;

Örnek : $x^2-5y+3=0$, $5x-7y=-2$

!

- A ve B iki cebirsel rasyonel ifade olmak üzere, A = B cebirsel denkleminde bilinmeyen yerine belli bir reel sayı a değiştirildiğinde, doğru sayı eşitliği elde ediliyorsa, a reel sayısına cebirsel denklemin çözümü denir.
- Bir cebirsel denklemi çözmek, onun tüm çözümlerini bulmak demektir.
- Bir cebirsel denklemin tüm çözümleri, o denklemin çözüm kümesini oluşturuyorlar.

Örnek 2. -1 sayısı $3x^2-2=\frac{x+5}{x^2+3}$ denkleminin çözümüdür, çünkü $3(-1)^2-2=\frac{(-1)+5}{(-1)^2+3}$ dir, yani $1=1$ dir.

Cebirsel denklemlere şu özellik geçerlidir:

❖ Bir cebirsel denklemin:

- çözümü vardır ve çözüm kümesi boş değilse ona **çözülebilir denklem** denir.
- çözümü yoktur ve onun hiçbir çözümü yoktur ve ona **çelişki** (**imkânsız**) denklem denir.

Örnek 3. $2x + 3 = 4x - 5$ denkleminin çözümü: a) 4; b) -3 sayısı olup olmadığını yoklayınız.

a) Verilen denklemde x yerine 4 sayısını değiştiriyoruz. Bu şekilde $2•4+3=4•4-5$, yani $11 = 11$ elde edilir. Buna göre 4 sayısı verilen denklemin çözümüdür ve bu çözüm tektir, yani denklemin **çözüm kümesi** $M = \{4\}$ olduğunu yazıyoruz. x değişkeni yerine -3 sayısını değiştirdiğimiz durumda, doğru sayı eşitliğin elde edilmediğini fark edeceğiz. Demek ki, -3 sayısı denklemin çözümü değildir.

1 Verilen denklemlerden hangileri imkansızdır:

a) $(x-3)\cdot 0 = 5,$ b) $3x-2=4x+1,$ c) $5x^2=-3,$ ç) $x+2=0$

a) ve c) denklemleri imkansızdır. Nedenini açıklayınız!

- Çözüm kümeleri aynı olan denklemlere ne denir?

❖ Tanım kümeleri aynı olan A = B ve C = D gibi iki cebirsel denklemin çözüm kümeleri **çakışıyorsa**, onlar denk denklemlerdir, yani,

$$(A=B \Leftrightarrow C=D) \Leftrightarrow M_1 = M_2$$

burada birinci denklemin çözüm kümesi M_1, ikinci denklemin çözümü M_2 dir.

❖ Denklemlerin çözümünde kullanılan denklik bağıntısının bazı özelliklerini sayalım:

1) $A=T \Rightarrow (A=B \Leftrightarrow T=B)$

2) $A=B \Leftrightarrow A+C=B+C$

3) $C \neq 0 \Rightarrow (A=B \Leftrightarrow AC=BC)$

4) $AB=0 \Leftrightarrow A=0$ veya $B=0$

Denklik bağıntısının bu özelliklerini, **denklemlerin denk dönüşümleri** diye tanıyoruz.

1.2. Lineer (birinci derece) denklemler ve lineer denklemlerin çözümü

- A = B cebirsel denklemi en sade şekilde getirildikten sonra, bilinmeyen sadece birinci derece olarak denklemde bulunuyorsa, ona lineer denklem denir.
- Bir bilinmeyenli lineer denklemin genel şekli $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R}.$ dir.

- $-3x+1=2$, $5x-2=3-x$, $3x+1-2x=0$, $3x+1=2$, $\frac{4x}{3}+\frac{x-3}{4}=5$

cinsinden denklemler bir ilinmeyenli lineer denklemlerdir.

Düşününüz ve cevaplayınız!

○ Bir bilinmeyenli lineer denklemin kaç çözümü vardır?

Örnek 4. $2x+3=x-1$, $\frac{-x+3}{2}=4$, $4x=7$ denklemleri bir bilinmeyenli lineer denklemlerdir.

Bir bilinmeyenli lineer denklemlerin çözümü için aşağıdakiler geçerlidir:

Doğrusal denklemin çözümü için aşağıdakiler geçerlidir:

- Her lineer denklem $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R}.$ şeklinde yazılabilir.

  $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R}.$ denklemin çözümü, a ve b reel sayılarına bağlıdır.

1) $a\neq 0$ ise, denklemin çözümü vardır ve bu çözüm $x=-\frac{b}{a}\cdot$ bir tek çözümdür.
2) $a=0\wedge b=0$, denklemin yine çözümü vardır, yani her reel sayı onun çözümüdür. Bu gibi denklemlerin sonsuz çok çözümleri vardır denir.
3) $a=0\wedge b\neq 0$ ise, denklemin çözümü yoktur (imkânsızdır), çünkü $0\cdot x+b=0,\ b\neq 0$ denklemi hiçbir reel sayı x için doğru sayı eşitliğine dönüşmez.

Örnek 5. Verilen lineer denklemleri çözünüz:

a) $x+2=7$; b) $\frac{x}{4}=5$; c) $5(2x-1)=7x+10$; ç) $\frac{x+3}{2}=\frac{5x-2}{3}$.

a) $x+2=7 \Leftrightarrow x+2-2=7-2 \Leftrightarrow x=7-2 \Leftrightarrow x=5$ İkinci özelliği uygulayarak, yani denklemin her iki tarafına -2 katmakla verilen denklem kolay çözülür:

b) $\frac{x}{4}=5\ /\cdot 4 \Leftrightarrow x=5\cdot 4 \Leftrightarrow x=20$ Üçüncü özelliği uygulayarak, yani denklemin her iki tarafını $C=4$ ile çarpmakla denklem çözülür

c) Bu denklemi birinci, ikinci ve üçüncü özelliği kullanarak çözeceğiz,

$$5(2x-1)=7x+10 \Leftrightarrow 5\cdot 2x-5\cdot 1=7x+10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x-5=7x+10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x-7x=10+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=15\ /\cdot\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\frac{15}{3} \Leftrightarrow x=5.$$

ç) Bu denklemi çözmek için önce üçüncü özelliği uygulayacağız, yani denklemin her iki tarafını paydaların EKOK'ı olan $C=6$ ile çarpacağız. Ondan sonra birinci ve ikinci özelliği kullanacağız:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{5x-6}{3} \Leftrightarrow 3(x+3)=2(5x-6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x+3\cdot 3=2\cdot 5x-2\cdot 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x+9=10x-12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x-10x=-9-12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -7x=-21\ /\cdot(-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x=21\ /\cdot\frac{1}{7} \Leftrightarrow x=\frac{21}{7} \Leftrightarrow x=3.$$ olduğunu buluyoruz.

Örnek 6. Verilen denklemin çözümünü inceleyiniz:

a) $2x+\frac{1-2x}{2}=x+\frac{1}{2}$ b) $x+3=2(2x-5)-3x;$ c) $3(x+2)=\frac{x}{4}-1.$

a) Denklemin çözümü vardır; denklemin sonsuz çok çözümleri vardır, çünkü

$$2x+\frac{1-2x}{2}=x+\frac{1}{2}\ /\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 4x+1-2x=2x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x-2x-2x=1-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\cdot x=0.$$

b) Çözümü yoktur, çünkü:

$$x+3=2(2x-5)-3x;$$
$$\Leftrightarrow x+3=4x-10-3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-4x+3x=-10-3 \Leftrightarrow 0\cdot x=-13.$$

c) Çözümü vardır; bir tek çözümü vardır, çünkü;

$$3(x+2)=\frac{x}{4}-1/\cdot 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12(x+2)=x-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12x-x=-4-24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11x=-28$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{28}{11}.$$

Bir denklemde, bilinmeyenden başka bilinen sayılan bazı harfler bulunabilir ve bunlara (reel) **parametreler** denir.

!

- Denklemde verilen bazı büyüklüklerin ifade edildiği ve dolayısıyla bilinmeyenlere bağlı olmayan genel sayılara (harflere) parametreler denir.
- Denklemde parametreleri genellikle Latin alfabesinin ilk küçük harfleriyle $a, b, c, d, \ldots, k, m, n$ gibi simgelerle işaret ediyoruz, değişkenler ise Latin alfabesinin son küçük harfleriyle $x, y, z, v, u, \ldots$ ile işaret ediyoruz.
- Genel olarak reel sayılar söz konusu olduğunda, onları reel parametreler olarak anlayacağız.

Örnek 7. a parametresinin hangi değeri için $ax-3a=1+5x$ denkleminin:

a) çözümü vardır; b) çözümü yoktur (çelişkidir).

Denklemi çözmeden önce, denkleme denk dönüşümler uygulayarak en sade şekilde yazalım:

$ax-3a=1+5x \Leftrightarrow (a-5)x=1+3a$

a) $a-5\neq 0$ durumunda denklemin çözümü vardır, yani $a\neq 5$ için, $x=\frac{1+3a}{a-5}$. denklemin bir tek çözümüdür.

$b)$ $a-5=0$ durumunda denklemin çözümü vardır, yani $a=5$ için, $0\cdot x=1+15=16$ dir.

Bir denklemin birden fazla parametreleri olabilir. Böyle durumlarda denklemin çözümlerinin incelenmesi her parametre için ayrı ayrı tespit edilir, daha da onlar arasındaki bağıntılar da göz önünde bulundurulur.

Şu örneği inceleyelim:

Örnek 8. m ve n parametrelerin hangi değerleri için $\frac{x}{m+n}+\frac{x}{n}=\frac{n}{m+n}$ denklemin çözümü vardır?

İlk önce, denklemin ancak $m+n\neq 0$, yani $m\neq -n$ ve $n\neq 0$ durumunda anlamı vardır.

$$\frac{x}{m+n}+\frac{x}{n}=\frac{n}{m+n} \quad / \cdot n(m+n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(m+n)\cdot\frac{x}{m+n}+n(m+n)\cdot\frac{x}{n}=n(m+n)\cdot\frac{n}{m+n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow nx+(m+n)\cdot x=n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mx+mx+nx=n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(2m+n)=n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{n^2}{2m+n}$$

Oradan şu sonuçlara varılır:

1) $2m + n \neq 0$, yani $n \neq -2m$ olduğu durumda denklemin bir tek çözümü vardır.

2) $m = 0$ ve $n = 0$ durumunda denklemin sonsuz çok çözümleri vardır.

3) $n = -2m$ ve $n \neq 0$ durumunda denklemin çözümü yoktur.

2 $\frac{5(x+2)}{6}-\frac{2(x-1)}{3}=\frac{3(x-2)}{2}$ denklemini çözünüz.

3 Parametrelerin değerlerine bağlı olarak $\frac{ax-b}{b}-\frac{bx-a}{a}=a-b$ denklemin çözümünü inceleyiniz.

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Verilen denklemlerden hangileri denktir:

a) $2x+1=0$ ve $2(x+1)=1$; b) $x=5$ ve $x^2=25$;

c) $\frac{x}{5}=2$ ve $\frac{3x}{2}=x+5$; ç) $\frac{x+3}{5}=0$ ve $-2(x+1)=7$.

2. Verilen denklemlerden hangileri bir bilinmeyenli lineer denklemdir:

a) $\frac{x}{3}=\frac{5}{7}$; b) $\frac{x^2-3}{2}=2$; c) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=\frac{x}{8}$; ç) $2-x^2=x$.

3. Verilen sayı $\frac{2x+1}{x-3}=1$ denklemin **çözümü olup** olmadığını yoklayınız::

a) –4; b) 2.

4. Verilen denklemlerden hangileri imkansızdır:

a) $2(1-x)+3=4x-2$; b) $x+2=3+x$; c) $-2x^2=5$; ç) $x-4=0$.

5. Verilen lineer denklemleri çözünüz:

a) $5-x=6$; b) $3\frac{x}{2}=-9$;

c) $2-\left[3(-2x+1)+(x-4)\right]=3x-2$; ç) $\frac{-x+2}{3}+\frac{2x-1}{4}-2=\frac{3(x-2)}{2}$.

6. Denklemleri çözünüz:

a) $2ax-a+4=8a+7-5x$; b) $4(x+4)=a(a-x)$.

7. a parametresinin hangi değeri için:

a) $4(3x-a)+2x=10$ denklemin çözümü $x=1$ dir.

b) $ax+10=5x-6$ denklemin çözümü $x=-8$ dir.

8. Parametrenin değerine bağlı olarak verilen denklemin çözümlerini inceleyiniz:

$$\frac{x+2a}{a-1}-\frac{x-2a}{a+1}=1.$$

2. Bir Bilinmeyenli Lineer Denklemlere Dönüşebilen Mutlak Değerli Denklemler

Reel sayının mutlak değeri kavramı modül 2 biriminde tanımlandı. $x\in\mathbb{R}$ sayısının mutlak değeri şu eşitlikle gösterilir:

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ için } x\geq 0 \\ -x, \text{ için } x<0 \end{cases}.$$

Düşününüz ve cevaplayınız!

- 7, 3 ve 0 sayılarının mutlak değerini belirtiniz!
- 2 sayısının mutlak değerinin, sayı doğrusunda geometrik anlamı nedir, yani |2| nedir ve |–2| nedir?

Mutlak değer kavramını, uzaklık kavramını açıklamak için kullanacağız.

!

- Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ sayının mutlak değeri, bu sayı Ox sayı doğrusunun başlangıcından hangi uzaklıkta olduğunu göstermektedir.
- İki reel sayı a ve b arasındaki uzaklıktan |a – b| reel sayısını anlayacağız ve d(a,b) biçiminde işaret edeceğiz.
- **Uzaklık aksiyomları** şunlardır:

1. $d(a,b) \geq 0, d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ya da $a - b \geq 0,\ a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$;
2. $d(a,b) = d(b,a)$ ya da $a - b = b - a$;
3. $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ ya da $a - c \leq a - b + b - c$.

Mutlak değerler içeren bir bilinmeyenli lineer denklemlerin en sade şekline nasıl getirildiğini şu örneklerle göstereceğiz.

Örnek 1. $|x| = 3$ mutlak değerli denklemin çözümü $x = 3$ ve $x = -3$ olduğu açıktır, çünkü $|-3| = |3| = 3$ tür. Bu çözümler nasıl elde edilir ve hangi bir bilinmeyenli lineer denklemin çözümü bu mutlak değerli denklemin çözümüne dönüşür?

Yukarıda verilen mutlak değerin tanımı gereğince, $|x| = 3$ mutlak değerli denklemin $x = 3$ ve $-x = 3$ denklemlerin çözümüne dönüşür. Oradan da denklemin çözümü $x = 3$ ve $x = -3$ elde edilir.

Örnek 2. Mutlak değer içeren $|x| - 3 = 7$ denklemini çözünüz.

Denkleme denk dönüşümler yaparak, onu daha sade bir denkleme dönüştürüyoruz, yani $|x| - 3 = 7 \Leftrightarrow |x| = 10$. . Örnek 1 de olduğu gibi, mutlak değerin tanımından $x = 10$ ve $x = -10$ elde edilir.

Örnek 3. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $|x+6| = 2$; b) $2x + |x-3| = 9$; c) $|x-3| = |2x+5|$.

a) Mutlak değerin tanımını uygulamakla

$$|x+6| = \begin{cases} x+6, & x \geq -6 \\ -(x+6), & x < -6 \end{cases}$$ elde edilir.

Denklemi iki aralıkta çözeceğiz.

1. $x \in (-\infty, -6)$: için

$-(x+6) = 2$

$x + 6 = -2$

2. $x \in [-6, +\infty)$: için

$x + 6 = 2$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = -2 - 6 \qquad\qquad\qquad\qquad x = 2 - 6$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = -8 \qquad\qquad\qquad\qquad x = -4$$

$x = -8 \in (-\infty, -6)$ ve $x = -4 \in [-6, +\infty)$.

elde edilir. Demek ki, denklemin iki çözümü vardır $x = -8$ ve $x = -4$.

b) Mutlak değerin tanımını kullanarak

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \ge 3 \\ -(x-3), & x < 3 \end{cases}.$$

yazabiliriz. Denklemi aralıklarla çözeceğiz.

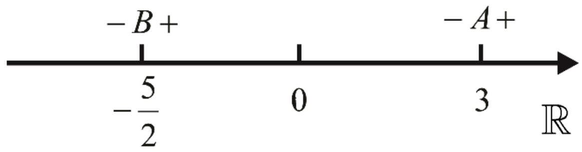
1) $x \in (-\infty, -3)$ için $2x - (x-3) = 9 \Leftrightarrow x + 3 = 9 \Leftrightarrow x = 6 \notin (-\infty, 3)$.
$x = 6$ çözümü, denklemin çözümü değildir.

2) $x \in [3, +\infty)$ için $2x + (x-3) = 9 \Leftrightarrow 3x - 3 = 9 \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x = 4 \in$
$x = 4$ çözümü, denklemin çözümüdür.

c) Mutlak değerin tanımını kullanarak

$$|A| = |x-3| = \begin{cases} x-3, & x \ge 3 \\ -(x-3), & x < 3 \end{cases} \qquad |B| = |2x+5| = \begin{cases} 2x+5, & x \ge -\frac{5}{2} \\ -(2x+5), & x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

yazabiliriz. Denklemi çözmek için incelenen aralıkların daha açık anlaşılması için, sayı doğrusunu kullanacağız:



Değişkenli A ve B ifadelerindeki işaretler, denklemi üç farklı aralıkta çözmemiz gerektiğini göstermektedir.

1) için: 3a $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$ Bu aralıkta değişkenli A ve B ifadeleri için şunu elde edeceğiz:
$|A| = -A, |B| = -B$ т.е $-(x-3) = -(2x+5) \Leftrightarrow -x + 3 = -2x - 5 \Leftrightarrow x = -8 \in (-\infty, -\frac{5}{2})$., yani
$x = -8$ çözümü, denklemin çözümüdür.

2) $x \in [-\frac{5}{2}, 3)$ için: Bu aralıkta değişkenli A ve B ifadeleri için şunu elde edeceğiz: $|A| = -A, |B| = B$,
yani

$$-(x-3)=2x+5 \Leftrightarrow -x+3=2x+5 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}\in[-\frac{5}{2},3).$$

$x=-\frac{2}{3}$ çözümü denklemin çözümüdür.

3) $x\in[3,+\infty)$ için: Bu aralıkta A ve B değişkenli aralıkları için, $|A|=A, |B|=B$ eşitlikleri doğrudur, yani $x-3=2x+5 \Leftrightarrow x=-8\notin(3,+\infty)$.

$x=-8$ çözümü denklemin çözümü değildir. Halbuki bu çözümü, birinci aralıkta da denklemin çözümü olarak elde etmiştik.

Dolayısıyla denklemin iki çözümü olduğunu $x=-8$ ve $x=-\frac{2}{3}$ elde ettik.

Not: Bu şekilde daha fazla mutlak değerler içeren denklemleri çözüyoruz.

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Verilen mutlak değerli denklemleri çözünüz:
   a) $|x|=3$; b) $|x|-3=7$; c) $5-8|-2x|=-75$; ç) $\frac{|7x+4|}{8}=3$.
2. Denklemleri çözünüz:
   a) $|2x-3|+1=4$; b) $|x-4|=|3x+1|$; c) $|-3x+7|=2$; ç) $-2|5-x|+3=-7$
3. Mutlak değerli denklemleri çözünüz:
   a) $|3x-2|-|-5x+1|=0$; b) $2|x|+|x-3|=x-1$; c) $|x|+|x+2|=3|x-1|-2$.

3. Lineer Denklemleri Oluşturmak ve Çözmek

Cebirsel ifadeleri daha sade şekilde dönüştürmek için çok kez şu formüllerden yararlanıyoruz: binomun karesi: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, $(A-B)^2=A2-2AB+B^2$ formülü ve karelerin farkı: $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ formülü.

$\frac{x+1}{3-x}$, $\frac{2x}{x+1}$, $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+2x}$ ifadeleri cebirsel kesirlerdir.

Cebirsel kesirlerin ancak paydaları sıfırdan farklı olduğu durumda anlamı vardır.

Çarpma işlemine ait kısa çarpma formüllerini ve denklemlerin bazı denk dönüşümlerini kullanmakla, bazı denklemler $a\,.\,x=b$ şeklinden bir bilinmeyenli lineer denkleme dönüşebiliyorlar. Bu bölümde, konkre örnekler çözerek bu gibi denklemlerin çözümüne odaklanacağız.

Örnek 1. $(x+3)^2+(2x-1)^2=5x^2-2x+2$ denklemini çözünüz.

Binomun karesi formülünü kullanarak ifadeyi sadeleştirerek çözüyoruz:

$$(x+3)^2+(2x-1)^2=5x^2-2x+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x+9+4x^2-4x+1=5x^2-2x+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+10=-2x+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x+8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x=-8 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{4} \Leftrightarrow x=-2.$$

Çözüm, $x = -2$ olduğunu buluyoruz.

Elde edilen çözümün yoklamasını yapınız!

İlerdeki örnekte verilen denklemin bazı reel sayılar için anlamı yoktur. Onu inceleyelim.

Örnek 2. $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$ denklemini tanım kümesinde çözünüz.

Denklemin$x = -1$ ve $x = 1$ sayıları hariç, tüm reel sayılar için, yani $x\in \mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\}$, anlamı vardır, çünkü x in o değerleri için denklemdeki kesirlerin paydaları sıfıra eşittir. Demek ki, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0$ koşulundan $x \neq -1$ ve $x \neq 1$ gerekir.

Denklemin çözümünü iki farklı şekilde yapacağız.

I – yöntem

Verilen denklemi $x2 - 1 \neq 0$ olmak üzere paydalarının EKOK $(x + 1, x - 1, x^2 - 1) = x^2 - 1$ ile çarpacağız. Bu şekilde verilene denk olan daha basit denklem elde edilir:

$$\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}\ /\cdot\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)-5(x+1)=x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-x+2-5x-5=x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8x-3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{8}.$$

Demek ki, denklemin çözümü $x=-\frac{3}{8}.$ dir.

II – yöntem

Denklemin paydalarını eşitliyoruz. Bu nedenle EKOK $(x+1,\ x-1,\ x^2-1) = x^2-1$ bulunur:

$$\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)-5(x+1)-x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-x+2-5x-5-x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8x-3}{x^2-1}=0.$$

Bir kesrin payı sıfır ise, kesrin değeri de sıfır olduğunu biliyoruz. Bu nedenle burada $-8x-3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{8}$, elde edilir. Görüldüğü gibi, elde edilen çözüm, I–ci yöntemle elde edilen çözümle aynıdır.

Çözümün yoklamasını yapalım:

Elde edilen $x=-\frac{3}{8}$ çözümü $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$, denkleminde değiştiriyorsak:

$$\frac{-\frac{3}{8}-2}{-\frac{3}{8}+1}-\frac{5}{-\frac{3}{8}-1}=\frac{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2-1}$$

$$\frac{-\frac{19}{8}}{\frac{5}{8}}-\frac{5}{-\frac{11}{8}}=\frac{\frac{9}{64}}{\frac{9}{64}-1}$$

$$-\frac{19}{5}+\frac{40}{11}=\frac{9}{-55}$$

$$\frac{9}{-55}=\frac{9}{-55}.$$

elde edilir.

İlerdeki örnek, parametreli lineer denklemdir. Parametrenin değerleri bağlantısında denklemin çözümlerini inceleyeceğiz.

Örnek 3. $\frac{x-1}{x+1}-\frac{a}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$ denklemini tanım kümesinde çözünüz. a parametresinin değerine göre denklemin çözümünü inceleyiniz!

Denklemi paydaların en küçük ortak katıyla çarpıyoruz.

EKOK $(x+1,\ x-1,\ x^2-1) = x^2-1$ burada $x^2-1 \neq 0$ koşulundan, $x \neq -1$ ve $x \neq 1$ elde edilir. Devamında denklemi elde edilir.

$$x^2=(x-1)(x-1)-a(x+1) \Leftrightarrow x^2=x^2-2x+1-ax-a \Leftrightarrow (a+2)x=1-a\ .$$

$a \neq -2$ için, denklemin $x=\frac{1-a}{a+2}$ olmak üzere bir tek çözümü vardır.

$a=-2$ için, denklemin çözümü yoktur, yani denklem $0 \cdot x = 0$ şeklindedir.

İlerde, bir bilinmeyenli lineer denklemler yardımıyla çözülebilen bazı metinli ödevleri çözeceğiz.

Örnek 4. Üç ardışık doğal sayının toplamı 246 dır. Bu sayıları bulunuz.

Bu sayılar $x,\ x+1$ ve $x+2$ üç ardışık doğal sayı olsun. Ödevin koşuluna göre, onların toplamı 246 dır. O halde:

$$x+(x+1)+(x+2)=246 \Leftrightarrow 3x+3=246 \Leftrightarrow x=81\ .$$

elde edilir. Demek ki aranılan sayılar: 81, 82 ve 83 tür

Örnek 5. Sara, Leman'dan 5 yaş küçüktür. Dört yıl sonra Leman Sara'dan iki defa daha büyük olacaktır. Sara ve Leman'ın şimdiki yaşlarını bulunuz.

Leman'ın yaşını x ile işaret edersek, Sara'nın yaşı $x-5$ olacaktır.

Dört yıl sonra Leman $x+4$ yaşında, Sara ise $x-5+4$ yaşında olacaktır. Ödevin koşuluna göre, dört yıl sonra Leman Sara'dan iki defa daha büyük olacaktır, dolayısıyla:

$$x+4=2(x-5+4) \Leftrightarrow x+4=2x-2 \Leftrightarrow x=6\ .$$

elde edilir. Buna göre Leman'ın şimdiki yaşı 6, Sara'nın ise $x-5=6-5=1$ dir.

Örnek 6. İki masa ve üç sandalyenin fiyatı 7050 denardır. Bir masanın fiyatı, bir sandalyenin fiyatından 400 denar daha fazla ise, masanın ve sandalyenin fiyatlarını bulunuz.

Bir sandalyenin fiyatını x ile işaret edersek, ödevin koşuluna göre masanın fiyatı $400+x$ olacaktır (masanın fiyatı 400 denar daha fazladır).

O halde, 3 sandalyenin fiyatı $3x$, iki masanın fiyatı ise $2(400 + x)$ olacaktır. İki masa ve 3 sandalyenin toplam fiyatı 7050 olduğu bilindiğine göre:

$$2(400+x)+3x=7050 \iff 800+2x+3x=7050 \iff x=1250\,.$$

elde edilir. Demek ki, bir sandalyenin fiyatı 1250 denardır. Bir masanın fiyatı ise $400 + x = 400 + 1250 = 1650$ denardır.

Örnek 7. Bir dikdörtgenin uzunluğu genişliğinin iki katına eşittir. Dikdörtgenin çevresi 78 metre ise, uzunluğunu ve genişliğini hesaplayınız.

Dikdörtgenin genişliği x olduğunu alırsak, koşula göre uzunluğu $2x$ olur. Dikdörtgenin çevresi 78 metre olduğuna göre:

$$2(x+2x)=78 \iff 2x+4x=78 \iff x=13\,.$$

elde edilir. Buna göre dikdörtgenin genişliği 13 metredir. Uzunluğu ise $2x = 2 \cdot 13 = 26$ metredir.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen denklemleri tanım bölgelerinde çözünüz:

a) $x^2-(x+3)(x-1)+3=2x-6$; b) $\dfrac{2x-5}{x-2}=\dfrac{3x-5}{x-1}-1$;

2. Bir rasyonel sayının paydası, payından 3 büyüktür. Payı 7 artar, paydası ise 1 azalırsa elde edilen yeni sayı $\frac{3}{2}$dir. Sayıyı bulunuz.

3. Bir iki basamaklı sayının rakamları toplamı 12 dir. Rakamlar yerlerini değiştirdiği durumda elde edilen yeni sayı verilenden 18 küçüktür. Bu hangi sayıdır?

4. $\%45$ nikel içeren bir metalden $\%78$ nikel içeren bir alışım yapmak için, 6 gram saf nikel ile kaç mg $\%45$ nikel içeren metal karıştırılmalıdır?

5. Altıda biri, dörtte birinden 3 küçük olan sayıyı bulunuz.

6. Fiyatı $\%30$ indirilmiş olan bir kitabı 350 denar almışsanız, onun asıl fiyatı ne kadarmış?

4. Bir Bilinmeyenli Lineer Eşitsizliğin Çözülmüş Şekli

Bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik kavramını tanımlamadan ve çözümünün nasıl yapıldığını incelemeden önce, birkaç soruyu cevaplayalım.

Düşününüz ve cevaplayınız!

- ○ Sayı eşitsizliği nedir? Örnek veriniz!
- ○ $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesi hangi aralığı göstermektedir? Aralığı sayı doğrusu üzerinde gösteriniz!?
- ○ $x < 5$ eşitsizliğin analitik ve grafiksel çözümü nedir?

Önce, bir bilinmeyenli eşitsizlik kavramını tanımlayalım.

❖ $<$, $\leq$, $>$ ya da $\geq$ işaretlerinden biri ile bağlı A ve B gibi iki cebirsel ifade ile bir bilinmeyenli eşitsizlik elde edilir.

Örnek 1. $3x \geq 12$, $2x+3<4$, $\frac{x-2}{3} > \frac{x+1}{6}$, $x-1>0$, … eşitsizlikleri bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik örnekleridir.

Bir bilinmeyenli denklemlerde olduğu gibi, burada da denk dönüşümler yapılabilir.

❖ Çözüm kümeleri denk olan $A < B$ ve $C < D$ iki eşitsizliğe denk eşitsizlikler denir ve $A < B \Leftrightarrow C < D$ biçiminde işaret edilir.
Denklik bağıntısının eşitsizliklerin çözümünde kullanılan bazı özelliklerini hatırlayalım:

1. $A < B \Leftrightarrow B > A;$
2. $A < B \Leftrightarrow A+C < B+C;$
3. $C > 0 \Rightarrow (A < B \Leftrightarrow AC < BC),\ C < 0 \Rightarrow (A < B \Leftrightarrow AC > BC).$

Eşitsizliklerin çözümünde kullanılan denklik bağıntısının bu özelliklerine daha da **eşitsizliklerin denk dönüşümleri** denir.

Örnek 2. 1–3 şıklarındaki özellikler yardımıyla $\frac{x-1}{4} \leq \frac{1}{3}x \Leftrightarrow x \geq -3$. denkliği ispatlanabilir.

Özellik 3 gereğince 3, $\frac{x-1}{4} \le \frac{1}{3}x$ eşitsizliğini $\text{EKOK}(3,4)=12$ ile çarpabiliriz. Bu şekilde:

$$12 \cdot \frac{x-1}{4} \le 12 \cdot \frac{1}{3} x \Leftrightarrow 3(x-1) \le 4x \Leftrightarrow 3x-3 \le 4x .$$

eşitsizlik elde edilir. Özellik 2'ye göre eşitsizlğin iki tarafına 3 katıyoruz, yani $3x-3+3 \le 4x+3$, $3x-4x \le 3 \Leftrightarrow -x \le 3$. elde edilir.

Özellik 3 gereğince son eşitsizliği (-1) ile çarpmakla (-1), $(-x)\cdot(-1) \ge 3\cdot(-1) \Leftrightarrow x \ge -3$ elde edilir.

Bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözebilmemiz için, bir bilinmeyenli eşitsizliğin çözümü nedir ve bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesi nedir kavramlarını açıklamamız gerekir.

!

- ❖ Bilinmeyenin herhangi bir değerine karşılık lineer eşitsizlik doğru sayı eşitsizliğine dönüşürse, o değere bir bilinmeyenli lineer eşitsizliğin **çözümü** denir.
- ❖ Eşitsizliği doğru sayı eşitsizliğine dönüştüren değerlerin kümesine **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir.

Örnek 3. $[3, +\infty)$ aralığına ait her sayı $x-3 \ge 0$ eşitsizliğinin çözümüdür, çünkü bu değerler için eşitsizlik doğru sayı eşitsizliğine dönüşür. Örnek $x=5$ için, $x-3 \ge 0$ eşitsizliği $5-3 \ge 0$ doğru sayı eşitsizliğine dönüşür. $x=5$ çözümü eşitsizliğin bir çözümüdür, $[3, +\infty)$ aralığı ise onun çözüm kümesidir.

!

- ❖ $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax < b$ biçiminde yazılabilen her eşitsizliğe **bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik** denir.

Örnek 4. $2x+3<5$, $\frac{x-1}{2}>4$, $x \le -6, \ldots$ eşitsizlikleri bir bilinmeyenli lineer eşitsizliklerdir.

Örnek 5. $x-6<1$ lineer denkleminin çözümüne ait yapılan denk dönüşümlerle $(-\infty, 7)$ aralığı eşitsizliğin çözümü olduğunu buluyoruz. Diğer sözlerle, verilen eşitsizliğe denk dönüşümler uygulamakla

$$x-6<1 \Leftrightarrow x<6+1 \Leftrightarrow x<7 .$$

elde edilir.

Oradan da, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, 7)$ aralığıdır.

1 Verilen bir bilinmeyenli lineer eşitsizliklerin çözümler kümesini yazınız:

a) $x \leq 2$; b) $2x > 12$; c) $x - 5 \geq 3$; ç) $x + 3 < 0$.

Örnek 6. bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikleri çözünüz:

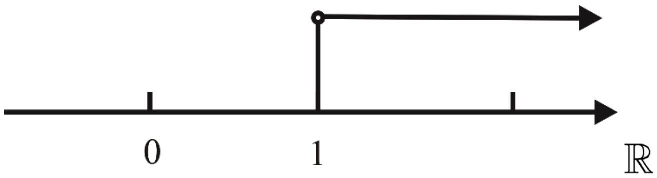
a) $-2(2x+3) \leq -10$; b) $-2(5+6x) < 6(8-2x)$;

c) $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+1}{5} < -\dfrac{2}{3}$; ç) $\dfrac{3-x}{12} + \dfrac{5(x-2)}{6} > 2 + \dfrac{3x}{4}$.

a) Önce parantezdeki ifadeleri -2 ile çarpıyoruz, ondan sonra ikinci ve üçüncü özelliği uyguluyoruz:

$$-2(2x+3) \leq -10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x - 6 \leq -10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x \leq -4 \;/\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \geq 1.$$

Demek ki, eşitsizliğin çözüm kümesi $[1, +\infty)$ aralığıdır. Aralıklar sayı doğrusu üzerinde grafiksel şekilde gösterildiğine göre. bu eşitsizliğin grafiksel çözümü şu şekilde ifade edilebilir:



Eşitsizlikleri çözerken, üçüncü özelliği uyguladığımızda dikkatli olmalıyız, yani negatif sayıyla çarptığımız durumda eşitsizlik işaretinin yönü değişir

b) Önce parantezlerden kurtuluyoruz, a) şıkkında olduğu gibi, ondan sonra özellikleri uyguluyoruz:

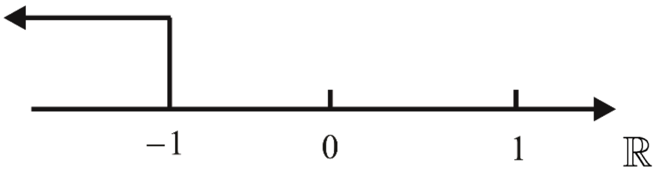
$$-2(5+6x) < 6(8-2x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -10 - 12x < 48 - 12x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \cdot x < 58 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < 58.$$

$0 < 58$ eşitsizliği doğru sayı eşitsizlik olduğuna göre, eşitsizliğin çözümü tüm reel sayılardır, yani $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

c) Önce üçüncü özelliği uygulamakla eşitsizliğin her iki tarafını 15 ile, yani paydaların en küçük ortak katıyla çarpıyoruz. Ondan sonra ikinci özelliği uygulayacağız. Bu şekilde

$$\frac{x-1}{3}-\frac{x+1}{5}<-\frac{2}{3}\ /\cdot 15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x-5-3x-3<-10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x<-1.$$

elde edilir. Demek ki bu eşitsizliğin çözümler kümesi $(-\infty, -1)$ aralığıdır; bunun sayı doğrusunda gösterilişi şu şekildedir:



ç) Eşitsizliğin her iki tarafını 12 ile çarptıktan sonra $1-3$ özelliklerini uygulayacağız:

$$\frac{3-x}{12}+\frac{5(x-2)}{6}>2+\frac{3x}{4}\ /\cdot 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3-x+10x-20>24+9x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\cdot x>41 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0>41.$$

elde edilir. $0>41$ eşitsizliği doğru sayı eşitsizliği olmadığına göre, eşitsizliğin çözümü yoktur, yani onun çözümler kümesi $\varnothing$ boş kümedir.

2 Verilen eşitsizliği çözünüz:

a) $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}+\frac{x}{7}<1;$ b) $(3x-1)^2+(4x+3)^2\geq(5x+4)^2$.

Lineer denklemlerde olduğu gibi, lineer eşitsizliklerde de bazı terimler ya da tüm terimleri mutlak değer işareti içinde olan örnekleri inceleyeceğiz.

Sıradaki örnek o türdendi

Örnek 7. Verilen mutlak değerli eşitsizlikleri çözünüz:

a) $|x-1|+2x>5$; b) $|2x-1|+|x-3|\leq 5$.

a) Mutlak değerin tanımından yararlanarak:

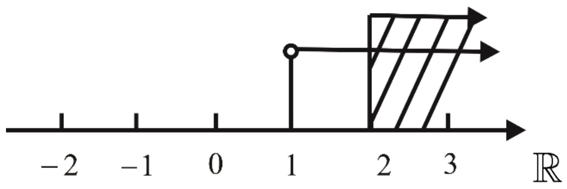
$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & x-1\geq 0 \\ -(x-1), & x-1<0 \end{cases}=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -(x-1), & x<1 \end{cases}.$$ elde edilir

Görüldüğü gibi, eşitsizliği tüm reel sayılarda inceleyecek yerde, aynısını iki aralıkta $[1, +\infty)$ ve $(-\infty, 1)$ aralıklarında ayrı ayrı incelemeliyiz.

1. $x \in [1, +\infty)$ olduğu durumda, eşitsizliğin çözümü:

$x-1+2x>5 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow x>2$. dir.

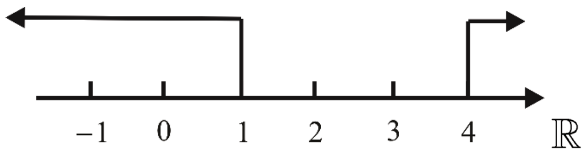
Elde edilen çözüm aralığı $(2, +\infty)$ ve incelenmesi mümkün olan aralığın kesişimini bulmakla, lineer eşitsizliğin çözümü $(2, +\infty)$ olduğunu buluyoruz.



2) $x \in (-\infty, 1)$ olduğu durumda eşitsizlik şu şekle dönüşür:

$-x+1+2x>5 \Leftrightarrow x>4 \Leftrightarrow x>4$.

Tanım kümesi $(-\infty, 1)$ ve eşitsizliği çözdüğümüz çözüm kümesi $(4, +\infty)$ aralığının kesişimini incelersek, kesişim $\varnothing$ küme olduğunu göreceğiz.



Sonuç olarak, verilen mutlak değerli eşitsizliğin çözümü, elde edilen çözümlerin birleşimidir $(2,+\infty)\cap\emptyset = (2,+\infty)$.

b) $|2x-1|+|x-3| \le 5$

Mutlak değerin tanımından şunları elde edeceğiz:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & 2x-1 \ge 0 \\ -(2x-1), & 2x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1, & x \ge \dfrac{1}{2} \\ -(2x-1), & x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x-3 \ge 0 \\ -(x-3), & x-3<0 \end{cases} = \begin{cases} x-3, & x \ge 3 \\ -(x-3), & x<3 \end{cases}$$

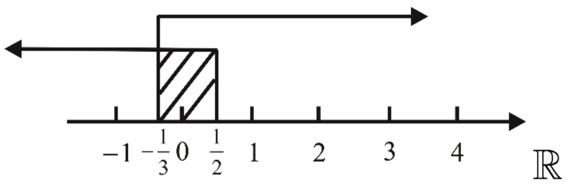
Buna göre eşitsizliğin çözümünü şu aralıklarda inceleyeceğiz:

$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},3\right),\left[3,+\infty\right)$.

1) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ aralığında eşitsizlik şu şekle dönüşür:

$$-\left(2x-1\right)-\left(x-3\right)\leq 5\Leftrightarrow$$
$$-2x+1-x+3\leq 5\Leftrightarrow$$
$$-3x\leq 1/\cdot(-1)\Leftrightarrow$$
$$3x\geq -1\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{3}.$$

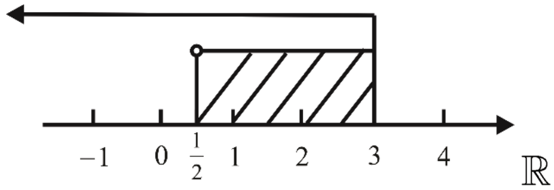
İncelenen aralık $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ ve lineer denklemin çözümüyle elde edilen $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$ aralığın kesişimini bulmakla $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ aralığı elde edilir.



2) $x\in\left[\frac{1}{2},3\right)$ olduğu durumda eşitsizlik şu şekle dönüşür:

$$2x-1-\left(x-3\right)\leq 5\Leftrightarrow$$
$$2x-1-x+3\leq 5\Leftrightarrow$$
$$x\leq 3.$$

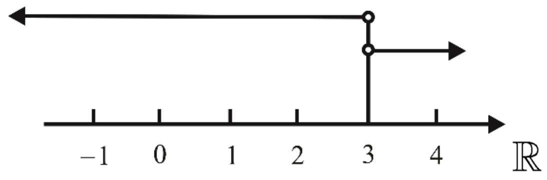
İncelenen aralık $\left[\frac{1}{2},3\right)$ ve lineer denklemin çözümüyle elde edilen $\left(-\infty,3\right]$ aralığın kesişimini bulmakla $\left[\frac{1}{2},3\right)$ aralığı elde edilir.



3) $x \in [3, +\infty\ ]$ olduğunda eşitsizlik şu şekle dönüşür:

$$2x-1+x-3 \le 5 \Leftrightarrow$$
$$2x-1+x-3 \le 5 \Leftrightarrow$$
$$3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3.$$

İncelenen aralık $[3, +\infty\ ]$ ve lineer denklemin çözümüyle elde edilen $[3,+\infty)$ aralığın kesişimini bulmakla, $x = 3$ elde edilir.



Sonunda, eşitsizliğin çözümü tüm aralıkların birleşimi olan küme belirtilir, yani

$$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},3\right)\cup\{3\}=\left(-\frac{1}{3},3\right].$$

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Verilen eşitsizlik çiftlerinden hangileri denk olduğunu yoklayınız:

a) $3(x-3)-5x > -3x-6$ ve $x > 3$; b) $3(1-2x) > 3-6x$ ve $x > 2$.

2. Bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözünüz;

a) $-5x+6 > -7(5x-6)-6x$; b) $-6(1+7x)+7(1+6x) \le -2$;

c) $-2(2-2x)-4(x+5) \le -24$; ç) $(x-1)^2-(x+3)^2 \le 2x-5$.

3. Bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikleri çözünüz::

a) $\frac{x}{3}-\frac{x}{2} < 3-2x$; b) $\frac{x-2}{3}-3 \ge \frac{x+1}{4}$;

c) $4-\frac{2(x-1)}{3} \le 3(1-2x)+5$; ç) $-3.5x-1.6 \ge 10.4-0.5x$.

4. Bir bilinmeyenli lineer eşitsizliği çözünüz $\frac{5+9x}{6}-\frac{7x}{18} \le \frac{1}{2}\left(5\cdot\frac{3-2x}{9}\right)$.

5. Verilen eşitsizliği sağlayan en büyük tam sayıyı belirtiniz:

$$(x+3)^2-\frac{x-3}{2} < (x-1)^2+3x.$$

6. $f(x) = 4x - 20$ fonksiyonunun işaretini belirtiniz. Ondan sonra fonksiyonun sıfırını bulunuz.

5. Bir Bilinmeyenli Lineer Eşitsizlikler Sistemi ve Bir Bilinmeyenli Lineer Eşitsizliklerin Bileşimi

5.1. Bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikler sistemi

$5 - 2x \leq -3x$ bir bilinmeyenli lineer eşitsizliğin çözümler kümesini belirtiniz!

$(-\infty, 3)$ ve $[\,0, +\infty)$ aralıkların kesişimi $(-\infty, 3) \cap [\,0, +\infty) = [\,0, 3)$ aralığıdır.

Yukarıdaki aralıkları grafiksel şekilde gösteriniz.

❖ İki tane bir bilinmeyenli lineer eşitsizliğin tümel evetlemesine, yani

$A < B \wedge C < D$, ya da $\begin{cases} A < B \\ C < D \end{cases}$ ifadesine **bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik sistemi** denir.

$<$ işareti yerine, $\leq$, $>$, $\geq$ işaretlerinden herhangi biri olabilir.

❖ Sistemdeki tüm eşitsizlikleri sağlayan, yani eşitsizlikleri doğru sayı eşitsizliklerine dönüştüren değerler kümesine **bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik sistemin çözüm kümesi** denir.

Bu sayılardan her birine bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik sisteminin **çözümü** denir.

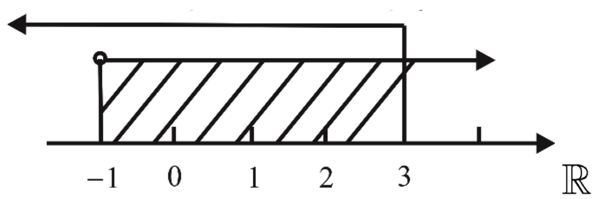
Şu örnekleri inceleyelim:

Örnek 1. Bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik sistemini çözünüz:

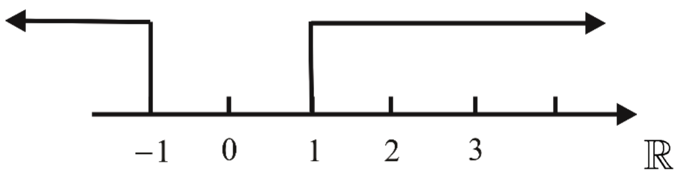
a) $\begin{cases} 2x+3 \geq 1 \\ 2 > x-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+3 < 1 \\ -x+6 < 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2(x+1)-2 > 3+x \\ x-2 < \dfrac{x+3}{2} - 1 \\ 3x > 4(x-1) \end{cases}$.

a) $\begin{cases} 2x+3\geq 1 \\ 2>x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq 1-3 \\ -x>-1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq -2 \\ -x>-3\ /\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x<3 \end{cases}$, yani sistemdeki birinci eşitsizliğin çözüm kümesi $[-1, +\infty)$ aralığıdır, ikinci eşitsizliğin çözüm kümesi ise $(-\infty, 3)$ aralığıdır. Sistemin çözümü ise her eşitsizliğin ayrı ayrı çözüm kümelerinin kesişimidir, yani
$[-1, +\infty)\cup(-\infty, 3) = [-1,3)$.

Çözümler kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterebiliriz.



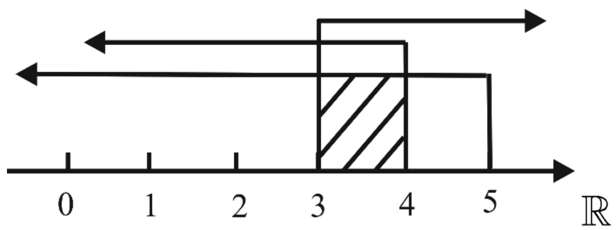
b) $\begin{cases} 2x+3<1 \\ -x+6<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<1-3 \\ -x<5-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<-2 \\ -x<-1\ /\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x>1 \end{cases}$. Demek ki, sistemdeki eşitsizliklerin çözümler kümesi sırasıyla $(-\infty, -1)$ ve $(1, +\infty)$ aralıklarıdır. Görüldüğü gibi, sistemin çözümü yoktur, çünkü bu aralıkların kesişimi boş kümedir, yani $(-\infty, -1) \cap (1, +\infty) = \varnothing$.



c)
$$\begin{cases} 2(x+1)-2>3+x \\ x-2<\dfrac{x+3}{2}-1 \\ 3x>4(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2-2>3+x \\ 2x-4<x+3-2 \\ 3x>4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x>3 \\ 2x-x<4+3-2 \\ 3x-4x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<5 \\ -x>-4\ /\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<5 \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<4 \end{cases}.$$

Eşitsizlikler sisteminin çözümler kümesi her üç eşitsizliğin çözüm kümelerinin kesişimidir:
$(3, +\infty)\cup(-\infty,5)\cup(-\infty, 4) = (3, 4)$; sayı doğrusu üzerinde gösterimi:



5.2. Bir bilinmeyenli lineer eşitsizliklerin Bileşimi

$(3, +\infty)$ ve $[0, +\infty)$ aralıkların birleşimi $(3, +\infty) \cup [0, +\infty) = [0, +\infty)$ aralığıdır.

Yukarıdaki aralıkların birleşimini grafiksel şekilde gösteriniz.

!

❖ İki (ya da daha fazla) bir bilinmeyenli lineer eşitsizliğin tikel evetlemesine, yani $A < B \vee C < D$, $\left[\begin{array}{l} A < B \\ C < D \end{array}\right.$, **ifadesine bir bilinmeyenli lineer eşitsizliklerin bileşimi denir.**

$<$ işareti yerine, $\leq, >, \geq$ işaretlerinden herhangi biri olabilir.

!

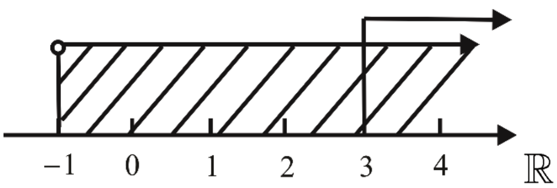
❖ Sistemdeki eşitsizliklerden en az birini sağlayan, yani eşitsizliklerden en az birini doğru sayı eşitsizliğine dönüştüren değerler kümesine **bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikler bileşiminin çözüm kümesi** denir. Bu sayılardan her birine bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikler bileşiminin **çözümü** denir.

Örnek 2. Verilen bir bilinmeyenli lineer eşitsizliklerin bileşimini çözünüz

a) $\left[\begin{array}{l} 2x+3 \geq 1 \\ 2 < x-1 \end{array}\right.$; b) $\left[\begin{array}{l} 2x+3 < 1 \\ -x+6 < 5 \end{array}\right.$.

a) $\left[\begin{array}{l} 2x+3 \geq 1 \\ 2 < x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geq 1-3 \\ -x < -1-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geq -2 \\ -x < -3 \,/\cdot(-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x > 3 \end{array}\right.$, Demek ki, bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikler bileşiminin çözüm kümeleri sırasıyla $(-\infty, -1)$ ve $(1, +\infty)$ aralıklarıdır. Buna göre, bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikler bileşimi elde edilen iki aralığın birleşimidir, yan i $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

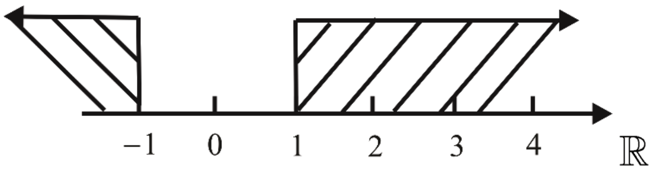
Bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik bileşiminin çözümler kümesinin geometrik gösterimini sayı doğrusu üzerinde yapabiliriz:



б) $\left[\begin{array}{l} 2x+3 < 1 \\ -x+6 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x < 1-3 \\ -x < 5-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x < -2 \\ -x < -1 \,/\cdot(-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right.$. Bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik sistemine dönüşen ve aynı zamanda bir bilinmeyenli lineer eşitsizlikler bileşimine de dönüşen daha bileşik örnekler çözelim.

dhe $(1, +\infty)$, përkatësisht. Domethënë, tërësia e pabarazimeve lineare me një të panjohur është unioni prej të dy intervaleve $(-\infty, -1)$ $(1, +\infty)$.

Paraqitja gjeometrike e bashkësisë së zgjidhjeve të tërësisë së pabarazimeve lineare me një të panjohur te boshti numrik është



Të zgjidhim eve shembuj të përbërë të detyrave të cilat sillen në sistem të pabarazimeve lineare me një të panjohur, por eve të tërësisë së sistemeve të pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Örnek 3. $\dfrac{x+1}{2-x} > 3$ eşitsizliğini çözünüz.

$\dfrac{x+1}{2-x} > 3 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2-x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-5}{2-x} > 0$. Bundan sonra eşitsizliği, iki lineer eşitsizlik sistemine dönüştürüyoruz, yani $\begin{cases} 4x-5>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$ ya da $\begin{cases} 4x-5<0 \\ 2-x<0 \end{cases}$ (bir kesrin ancak pay ve paydası aynı işaretli olduğu durumda kesir pozitiftir). Açıktır ki bu durum bir bilinmeyenli iki lineer eşitsizlik sisteminin bileşimi söz konusudur.

Bu nedenle, her iki sistemin çözüm kümelerini hesaplıyoruz, ondan sonra elde edilen iki çözüm kümenin birleşimini belirtmekle eşitsizliğin çözümünü buluyoruz. Buna göre, birinci sistemin

çözümü: $\begin{cases} 4x-5>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x>5 \\ -x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{4} \\ x<2 \end{cases}$ elde edilir, bu ise $\left(\dfrac{5}{4}, 2\right)$ aralığıdır.

İkinci sistemin çözümü: $\begin{cases} 4x-5<0 \\ 2-x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x<5 \\ -x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{5}{4} \\ x>2 \end{cases}$ elde edilir, bu ise boş kümedir $\varnothing$.

Dolayısıyla eşitsizliğin çözümü $\left(\dfrac{5}{4}, 2\right) \cup \varnothing = \left(\dfrac{5}{4}, 2\right)$ aralığıdır.

○ Çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde göstermeyi deneyiniz.

Örnek 4. $(x-2)(x+1) \le 0$ eşitsizliğini çözünüz.

$(x-2)(x+1) \leq 0$ eşitsizliğini iki eşitsizlik sistemine dönüştürüyoruz: $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ ya da $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \leq 0 \end{cases}$ (iki sayının çarpımı negatif olması için çarpanların işaretleri ters olmalıdır). Açıktır ki bu durum bir bilinmeyenli iki lineer eşitsizlik sisteminin bileşimi söz konusudur.

Ondan sonra her iki eşitsizlik sistemini çözüyoruz:

$\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$, yani $[-1,\ 2]$ aralığı çözüm kümesidir;

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$, yani çözüm kümesi boş kümedir $\varnothing$.

Buna göre, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $[-1, 2] \cup \varnothing = [-1, 2]$ dir.

○ Çözümler kümesini sayı doğrusu üzerinde göstermeyi deneyiniz!

Bu modüler birimin başlangıcında mutlak değerli denklemlerin nasıl çözüldüğünü açıkladık. Şimdi bir örnekle lineer eşitsizlik içinde mutlak değer bulunan bazı eşitsizliklerin çözümüne ait daha bir yöntemi açıklayacağız.

Örnek 5. Verilen mutlak değerli eşitsizlikleri çözünüz:

a) $\left|\frac{x}{4}\right| \leq 3$; b) $|x+1| \leq 6$.

a) Mutlak değerin tanımından $\left|\frac{x}{4}\right| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq \frac{x}{4} \leq 3 \Leftrightarrow -12 \leq x \leq 12$,

elde edilir, bu ise $\begin{cases} \frac{x}{4} \geq -3 \\ \frac{x}{4} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -12 \\ x \leq 12 \end{cases}$ lineer eşitsizlik

sisteminin çözümüyle aynıdır, yani çözümler kümesi $[-12, 12]$ aralığıdır.

○ Çözümler kümesini sayı doğrusu üzerinde göstermeyi deneyiniz!

b) Benzer şekilde: $x+1 \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x+1 \leq 6 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 5$,

elde edilir. yani $[-7,\ 5]$ aralığı aslında:

$$\begin{cases} x+1 \geq -6 \\ x+1 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases}$$ bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik sisteminin çözümüdür.

○ Çözümler kümesini sayı doğrusu üzerinde göstermeyi deneyiniz!

Örnek 5. Verilen mutlak değerli eşitsizlikleri çözünüz:

a) $5 > |2x+1|$; b) $x + |2x+1| \leq 1$.

a) $5 > |2x + 1|$ eşitsizliğini $|2x + 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 1 < 5$ şeklinde gösterebiliriz.

Bu şekilde $\begin{cases} 2x+1 > -5 \\ 2x+1 < 5 \end{cases}$ eşitsizlik sistemi elde edilir.

○ Eşitsizlik sistemini çözmeyi deneyiniz.

b) $x + |2x+1| \leq 1$ eşitsizliğini $|2x+1| \leq 1-x \Leftrightarrow -(1-x) \leq 2x+1 \leq 1-x$ şeklinde gösteriyoruz.

Oradan $\begin{cases} 2x+1 \geq x-1 \\ 2x+1 \leq 1-x \end{cases}$. eşitsizlik sistemi elde edilir.

○ Eşitsizlik sistemini çözmeyi deneyiniz.

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik sistemini çözünüz:

a) $\begin{cases} 2x+3 < -x+1 \\ -x+4 \geq 3+2x \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2(x+1)-3 > 1-3x \\ -2(x-2)-1 \leq 4\left(\dfrac{x}{2}+3\right) \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} \leq \dfrac{3x-1}{4} \\ -2(x+1)-3x > 4x-2 \end{cases}$; ç) $\begin{cases} 2x-1 < 3x-4 \\ 3(1-x)+2 \leq 4x-3 \\ x-1 > \dfrac{x-2}{3}+3 \end{cases}$.

2. Eşitsizliği çözünüz:

a) $(x+1)(x-2) \geq 0$; b) $(x-5)(x+2) < 0$.

3. Eşitsizliği çözünüz:

a) $\dfrac{x+1}{2x-3} > 2$; b) $\dfrac{2-x}{x+1} \leq -3$.

4. Mutlak değerli eşitsizliği çözünüz:

a) $|x| - 3 \leq 0$; b) $|10+4x| < 14$; c) $7\left|\dfrac{x}{3}\right| - 9 < 12$;

ç) $\dfrac{|x-4|}{5} \le 2$; d) $|x+1| \le 2-3x$; dh) $3x+|x+1| \le 2$.

6. Modüler Birime Ait Tekrarlama Alıştırmaları

1. -4 sayısı $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x}{4}-5x=13$ denkleminin çözümü olup olmadığını yoklayınız.

2. $-2\cdot\left[4(-3x+4)+(x-7)\right]=3(2x+5)$ denklemini çözünüz.

3. a parametresinin hangi değeri için, $-3(x-5a)+4x=17$ denkleminin çözümü $x=2$ dir.

4. Mutlak değerli olan $|2x-3|+|-4x+7|=2$ denklemini çözünüz.

5. Bir sayı diğer bir sayının üç katıdır. Onların toplamı 84 tür. Sayıları bulunuz.

6. Verilen eşitsizlikler çiftinin denk olup olmadıklarını yoklayınız: $-2(x-3)-x<4x+6$ ve $x<-3$.

7. $\dfrac{2-7x}{3}+\dfrac{5x}{2}\ge\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x-4}{6}\right)$ lineer eşitsizliği çözünüz.

8. $f(x)=-3x+21$ fonksiyonunun işaretini belirtiniz. Ondan sonra fonksiyonun sıfırını bulunuz.

9. Verilen eşitsizlik sistemini çözünüz: $\begin{cases} 2+x>3(x-1)+4 \\ x-3<\dfrac{2x-5}{2} \\ 2>4(x-1) \end{cases}$.

10. Mutlak değerli eşitsizliği çözünüz: $\dfrac{|x-3|}{2}\ge 5$.

6

LİNEER (BİRİNCİ DERECEDEN) FONKSİYON İKİ BİLİNMEYENLİ LİNEER DENKLEMLER SİSTEMİ

MODÜLER BİRİMİN HEDEFLERİ

Bu modüler birimini incelemekle öğrenci şu kazanımları elde etmelidir:

- Lineer (birinci dereceden) fonksiyonu tanımlayabilmelidir;
- Lineer fonksiyonun grafiğini çizebilecektir;
- Lineer fonksiyonun özelliklerini belirtecektir;
- Lineer fonksiyonun parametrelerine bağlı olarak elde edilen grafiklerden doğruların paralel olup olmadıklarını belirtebilecektir;
- Farklı yöntemlerle birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemini çözebilecektir;
- İki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümleriyle ilgili tartışma yapabilecektir;
- İki bilinmeyenli denklem sistemleri yardımıyla pratikten problemler çözebilecektir.

MODÜLER BİRİM 6'NIN İÇİNDEKİLERİ

1. Lineer (Birinci Dereceden) Fonksiyon. Lineer Fonksiyonun Grafiği

Lineer fonksiyonlara, fizikte olduğu gibi doğal bilimlerde çok sık rastlıyoruz. İlerde bir örnekte görüldüğü gibi, düzgün doğrusal hareketin incelenmesinde rastlayacaksınız.

1.1. Lineer Fonksiyon

Şu örnekleri göz önünde bulundurun:

Örnek 1. Yeni doğan bir bebek $2{,}5$ kg ağırlığındadır. Doğumdan ilk 2 ay zarfında bebeğin ortalama ağırlığı günde $0{,}05$ kg arttığını varsayarsak, x gün sonra bebeğin ağırlığı ne kadar olacaktır?

x gün sonra çocuğun ağırlığı $0{,}05x$ kg olacağı açıktır. Çocuğun doğumundan x gün sonra ağırlığını T ile işaret edersek

$$T = 0{,}05x + 2{,}5$$

olacaktır. Demek ki, yeni doğan bebeğin ağırlığı geçilen gün sayısı, $x < 60$ gün olmak üzere x in bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir.

Örnek 2. $1m$ uzunluğunda nikelden bir çubuk t°C ısıtılıyor. Bu durumda çubuğun uzunluğu L belirtilsin.

$1m$ uzunluğunda nikel çubuk 0°C den 1°C ısıtılınca uzunluğu $0{,}0013$ cm artar. t°C ısıtılınca, uzunluğu $0{,}0013t$ olacaktır. O halde uzunluğu

$$L = 0.0013t + 100.$$

olacaktır. Demek ki, nikel çubuğun uzunluğu ısıtıldığı sıcaklık t nin bir fonksiyonu olarak ifade edilmiştir.

Her iki örnekte elde edilen fonksiyonlar lineerdir (birinci derecedir).

- $y = 2x + 3$, $f(x) = -3x + 5$, $y = 2x$, $y = -x$ biçiminden fonksiyonlar lineer fonksiyonlardır.
- $y = 2x + 3$ fonksiyonunda, değişken önündeki katsayı 2, serbest terim ise 3 tür.
  $y = 2x$ fonksiyonunda ise, değişken önündeki katsayı 2, serbest terim ise 0 dır.

Düşününüz ve cevaplayınız:

- ○ Lineer fonksiyon hangi sayılar için tanımlıdır?
- ○ Lineer fonksiyonun değerler kümesi nedir?

Lineer fonksiyonlardan daha iki örnek inceleyelim:

Örnek 3. a) Lineer fonksiyona fizikte düzgün doğrusal hareketi incelerken rastlıyoruz. Burada geçilen yol $x(t) = vt$ zaman t nin bir fonksiyonudur, v ise hareketin hızıdır.

b) Düzgün hızlanan harekette de lineer fonksiyona rastlanır. Burada $v(t) = v_0 + at$ hızın t zamanına göre bağıntısı verilmiştir, v_0 hareketin başlangıç hızıdır, a ise hızlanmadır.

!

- a, b sabitler (herhangi reel sayılar), x değişken ya da argüman olmak üzere $y = ax + b$ ($f(x) = ax+b$) şeklinden **fonksiyonlara lineer** (birinci derece) fonksiyon denir. a sayısı değişken önündeki katsayı, b ise **serbest terimdir**.
- Lineer fonksiyonun tanım aralığı (bölgesi) D_f ve değerler kümesi V_f reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ dir.

1 $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$. lineer fonksiyonu verilmiş olsun. Şunları belirtiniz.

a) $f(3)$; b) $f(0)$; c) $f(\frac{c}{d})$.

1.2. Lineer Fonksiyonun Grafiği

Bir fonksiyonun değişimini incelemek, onun tanım kümesini belirtmek ve değişkeninin artmasıyla fonksiyonun değerinin nasıl arttığını ya da azaldığını incelemek demektir. Yukarda lineer fonksiyonla ilgili örnekler gördük. Lineer fonksiyonun grafiği için şu özellik geçerlidir:

- Lineer fonksiyonun grafiği $G_f = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = ax + b\}$.
- G_f kümesini geometrik şekilde dik açılı Dekart koordinat sisteminde düzlemde gösterilir**.**
- Lineer fonksiyonun grafiği doğrudur. “ İki farklı noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer” aksiyomu gereğince, lineer fonksiyonun grafiğini çizmek için, o doğruya ait olan iki farklı noktanın seçilmesi yeterlidir.

Örnek 4. $y = 2x - 1$ lineer fonksiyonun grafiğini çizelim. Bunun grafiği

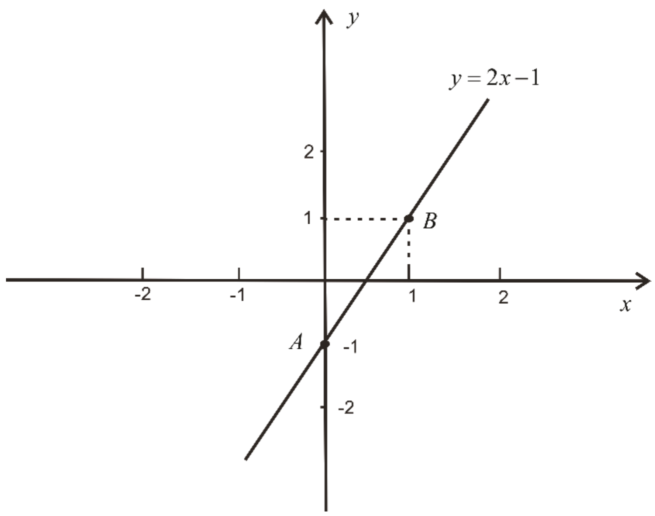
$G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = 2x - 1\}$ kümesidir. $y = 2x - 1$ lineer fonksiyonun grafiğini çizerken şu işlemleri yapacağız:

1. lineer fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir. Bu nedenle x değişkeni için herhangi iki reel sayıyı seçebiliriz; örnek 0 ve 1 olsun. Seçilen reel sayılar için fonksiyonun değerlerini hesaplıyoruz: $y(0) = -1$, $y(1) = 1$. Ondan sonra $y = 2x - 1$ lineer fonksiyonunu tablo biçiminde gösteriyoruz:

x	y
0	-1
1	1

2. Bu şekilde $y = 2x - 1$ lineer fonksiyonun grafiğine ait olan iki nokta elde etmiş oluyoruz; bu noktalar $A(0, 1)$ ve $B(1,1)$ dir.

3. A ve B noktalarını dik açılı Dekart koordinat sisteminde çizdikten sonra, doğruyu çiziyoruz.



Düşününüz ve cevaplayınız:

- x eksenine ne denir? y eksenine ne denir?
- $O(0,0)$ *noktasına ne denir?*
- x *apsis eksenine ait olan noktaların koordinatları nedir,* y*– ordinat eksenine ait olan noktaların koordinatları nedir?*

2 Şu lineer fonksiyonların grafiklerini çiziniz: $y = 3x - 1, y = -3x - 1, y = x$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. $f(x) = -5x + 3$ lineer fonksiyonu verilmiş olsun. Hesaplayınız:

a) $f(-1)$; b) $f(0)$; c) $f(p)$.

2. Verilen a) $y=-2x+1$; b) $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$; c) $y=x$ lineer fonksiyonların değişken önündeki katsayısını ve serbest terimini belirtiniz.

3. Verilen lineer fonksiyonların grafiğini çiziniz: a) $y=x+5$; b) $y=-2x$; c) $y=4x-3$.

4. k parametresinin hangi değeri için $y = -kx + 2 - k$ fonksiyonun grafiği $A(2,-1)$ noktasından geçer?

5. $f(x) = ax + b$ fonksiyonu için, $f(0) = 1$ ve $f(-2) = 5$ dir. Lineer fonksiyon belirtilsin.

6. Verilen lineer fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz:

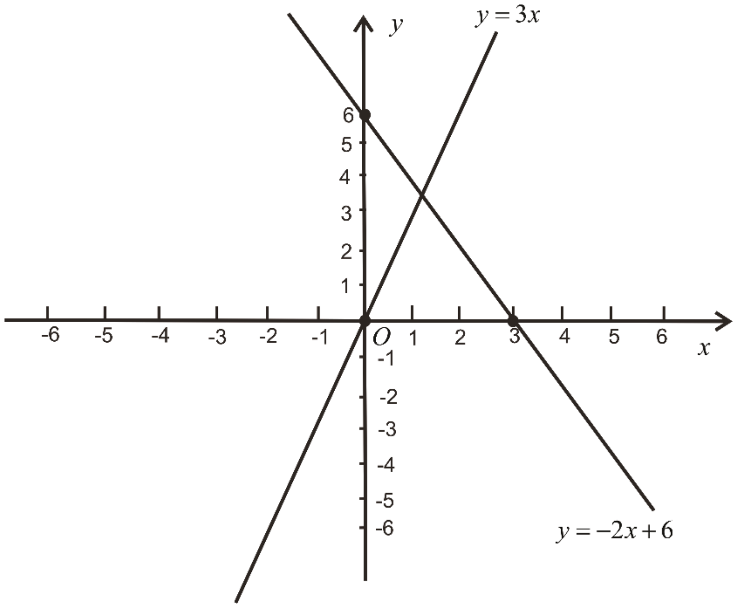
a) $y=2x-3, y=2x+5, y=2x+1$;
b) $y=3x, y=-2x, y=x$;
c) $y=2x-3, y=x-3, y=-x-3$.
Ne fark ediyorsunuz?

2. Lineer Fonksiyonun Özellikleri

Lineer fonksiyonu tanımladıktan sonra, burada onların özelliklerini inceleyeceğiz. Lineer fonksiyon için şunları biliyoruz:

- a ve b sabitler (herhangi reel sayılar), x değişken ya da argüman olmak üzere $y = ax + b$ ($f(x) = ax + b$) biçiminden fonksiyona **lineer fonksiyon** denir. a değişken önündeki katsayı, b ise **serbest terimdir**.
- Lineer fonksiyonun tanım kümesi D_f ve değerler kümesi V_f reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ dir.

Örnek 1. Şekilde, aynı koordinat sisteminde $y=3x, y=-2x+6$: fonksiyonların grafikleri çizilmiştir:



Birinci lineer fonksiyon $y = 3x$ koordinat eksenlerini $O(0, 0)$ koordinat başlangıcında keser. İkinci lineer fonksiyon apsis eksenini $(3, 0)$ noktasında, ordinat eksenini ise $(0, 6)$ noktasında keser.

❖ $y = ax + b$ lineer fonksiyonun koordinat eksenlerini kestiği noktaları, grafiğini çizmeden cebirsel şekilde de belirtebiliriz.

$y = ax + b$ **lineer fonksiyonun grafiğinin x apsis ekseniyle kesiti** $(x, 0)$ cinsinden noktadır. Bu durumda fonksiyon sıfıra eşittir, yani $y = 0$ ve $ax + b = 0$ lineer denklemini

x bilinmeyenine göre çözmekle $x = -\frac{b}{a}$ elde edilir. Demek ki, koordinatları $(-\frac{b}{a}, 0)$ olan

nokta, $y = ax + b$ lineer fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktadır. Fonksiyonu sıfır yapan

$x = -\frac{b}{a}$ argümanın değerine **fonksiyonun sıfırı** denir.

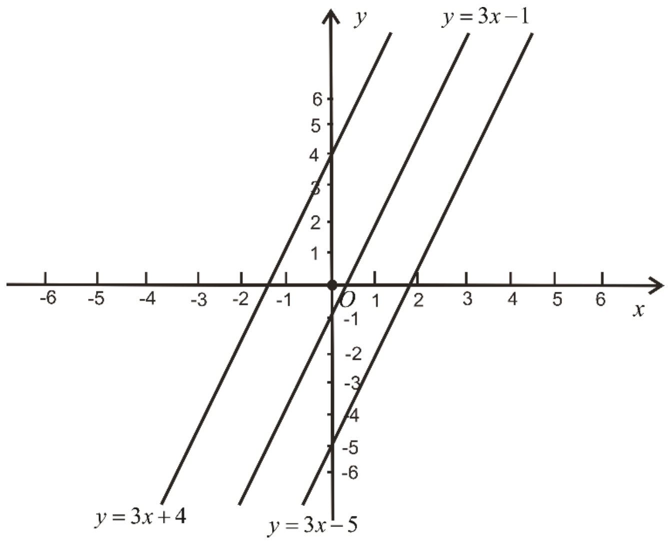
❖ $y = ax + b$ **lineer fonksiyonun grafiğinin y ordinat ekseniyle kesiti** $(0, y)$ cinsinden noktadır. Bu demektir ki, $x = 0$ için $y = a \cdot 0 + b = b$ elde edilir. Buna göre koordinatları $(0, b)$ olan nokta, $y = ax + b$ lineer fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği noktadır.

1 Verilen lineer fonksiyonların koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını bulunuz:

a) $y = \frac{1}{3}x - 1$; b) $y = -4x + 8$.

Verilen her lineer fonksiyonun sıfırını bulunuz.

Örnek 2. Aynı koordinat sisteminde $y = 3x - 1, y = 3x + 4, y = 3x - 5$ lineer fonksiyonların grafiklerini çiziyoruz. Şu grafikler elde edildi:



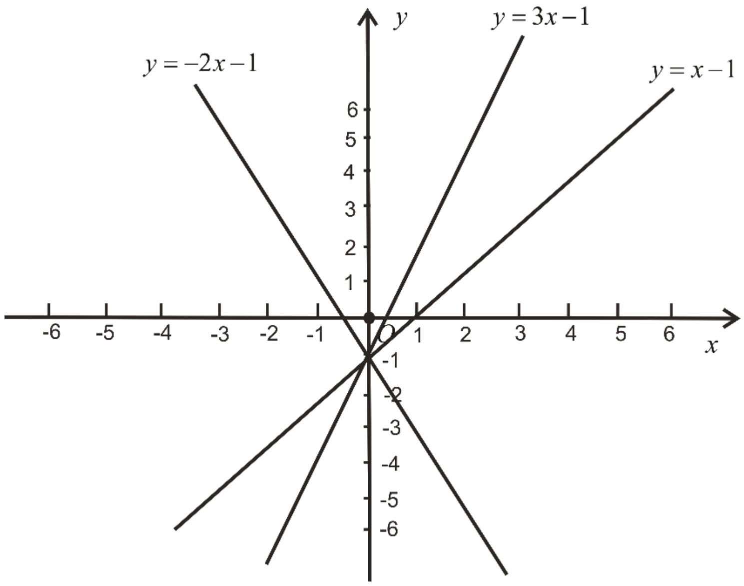
○ Şekildeki üç doğruyu inceleyiniz, onların birbirine göre durumu nasıldır?

Her halde, bu üç doğrunun birbirine paralel olduğunu görüyorsunuz. Bu bir tesadüf değildir, çünkü onların argüman önündeki katsayıları birbirine eşit olduğu durumda lineer fonksiyonların grafikleri birbirine paralel doğrulardır.

2

a parametresini o şekilde belirtiniz ki, $y = (a - 3)x - 1$ fonksiyonun grafiği $y = -5x + 4$ fonksiyonunun grafiğiyle paralel olsun. Hangi lineer fonksiyonu elde ettiniz?

Örnek 3. $y = 3x - 1, y = -2x - 1, y = x - 1$ lineer fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizelim. Şu grafikler elde edildi:



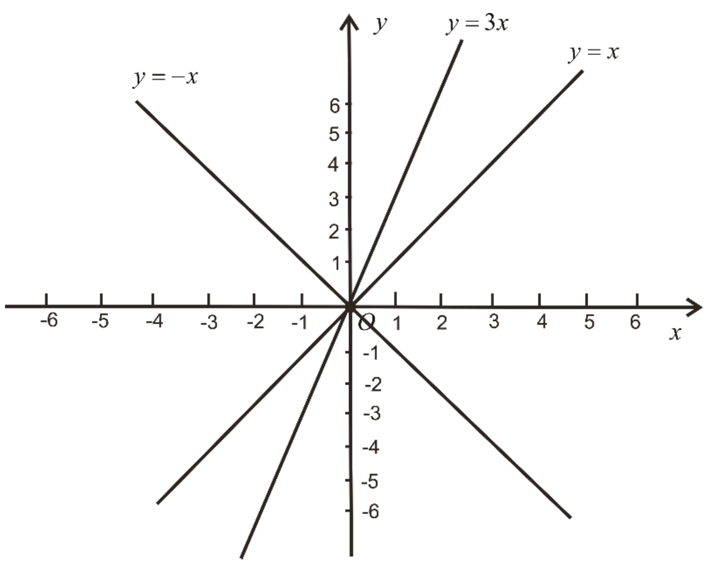
○ Çizilen lineer fonksiyonların grafiklerini inceleyiniz. Bu grafiklerle ilgili nasıl sonuca varıyorsunuz?

Her üç doğru bir noktada, yani $(0, -1)$ noktasında kesiştiklerini her halde görüyorsunuz.

Bu bir tesadüf değildir, çünkü serbest terimler birbirine eşit oldukları durumda, lineer fonksiyonların grafikleri y ordinat ekseni üzerinde $(0, b)$ noktasında kesişiyorlar.

3 $y=(a-3)x-a$ lineer fonksiyonunda a parametresini o şekilde belirtiniz ki grafiği, $y=-3x+1$ fonksiyonun grafiğiyle ordinat ekseninde aynı noktada kesişsin. Hangi lineer fonksiyon elde edilir?

Örnek 4. $y=3x$, $y=-2x,$ $y=x$ lineer fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz:



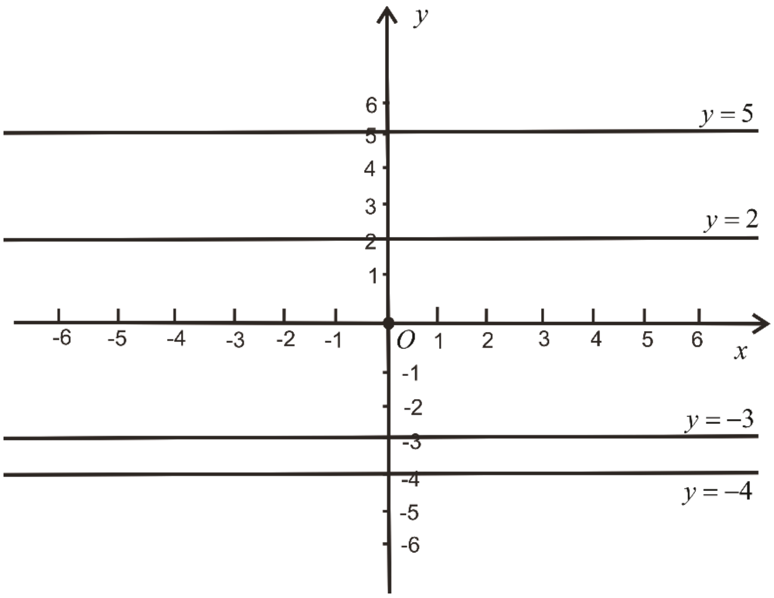
○ Çizilen lineer fonksiyonların grafiklerini inceleyiniz. Bu grafiklerle ilgili nasıl sonuca varıyorsunuz?

Her üç doğru bir noktada, yani $(0,\ 0)$ koordinat başlangıcında kesiştiklerini her halde görüyorsunuz.

Bu bir tesadüf değildir, çünkü serbest terimler sıfıra eşit oldukları durumda, lineer fonksiyonların grafikleri koordinat başlangıcı $(0,\ 0)$ noktasında kesişiyorlar.

4 $y=(a+1)x-(a-1)$ lineer fonksiyonunda a parametresi o şekilde belirtilsin ki grafiği $O(0,0)$ koordinat başlangıcından geçsin. Hangi lineer fonksiyon elde edilir?

Örnek 5. $y=-3,\ y=2,\ y=5,\ y=-4$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz:



○ Çizilen lineer fonksiyonların grafiklerini inceleyiniz. Bu grafiklerle ilgili nasıl sonuca varıyorsunuz?

Her dört doğru x apsis ekseniyle paralel olduklarını her halde görüyorsunuz. Bu bir tesadüf değildir, çünkü argüman önündeki katsayı sıfır ise, yani $a=0$ durumunda fonksiyon $y=b$ şekline dönüşür. Bu gibi fonksiyonlara **sabit fonksiyon** denir.

5 a parametresini o şekilde belirtiniz ki, $y=(a+1)x-(a-1)$ lineer fonksiyonu sabit fonksiyon olsun. Hangi lineer fonksiyonu elde ettiniz?

Düşününüz ve cevaplayınız:

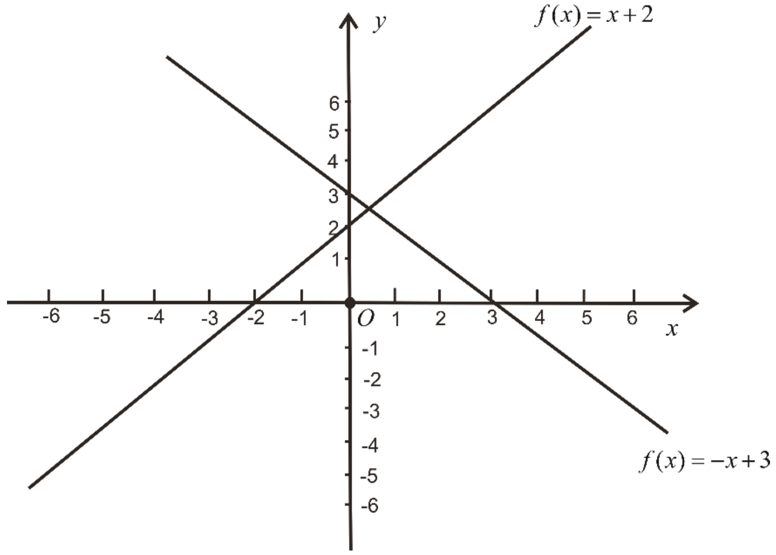
○ $y = 0$ lineer fonksiyonunu çiziniz
○ Ne fark ediyorsunuz?

$f(x)=x+2, f(x)=-x+3$. lineer fonksiyonları verilmiş olsun. $f(x)=x+2$ fonksiyonu için $f(1)=3, f(2)=4, f(3)=5$ geçerlidir. Şunu fark edebiliriz: değişkenin artmasıyla $f(x)=x+2$ fonksiyonun değeri de artmaktadır.

$f(x)=-x+3$ fonksiyonu için ise, $f(1)=2, f(2)=1, f(3)=0$ dir. Burada, değişkenin artmasıyla $f(x)=-x+3$ fonksiyonun değerinin azaldığını görüyoruz.

❖ Bu bir tesadüf değildir, çünkü verilen $f(x)=ax+b$ lineer fonksiyonun artan ya da eksilen olup olmadığı değişken önündeki a katsayısının işaretine bağlıdır.
Bu nedenle a katsayısına doğrunun eğimi denir.

Örnek 6. $f(x)=x+2, f(x)=-x+3$. lineer fonksiyonlarını çizelim.



Verilen lineer fonksiyonların grafiklerinden şu sonuçlara varabiliriz: **doğrunun eğimi pozitif reel sayı** ($a > 0$) **olduğu durumda fonksiyon artandır, doğrunun eğimi negatif reel sayı olduğu durumda** ($a < 0$) **fonksiyon monoton eksilendir**.

6 Aynı koordinat sisteminde verilen lineer fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

$y=x, y=x+2, y=-x+2, y=-\frac{1}{2}x, y=3$ Bunlardan hangilerinin grafikleri birbirine paraleldir? Hangilerinin grafikleri ordinat ekseninde aynı noktada kesişiyorlar? Hangi grafikler monoton artan, hangileri ise monoton eksilendir?

!

- ❖ $f(x) = ax + b$ lineer fonksiyonun apsis ekseni x ile kesişimine fonksiyonun sıfırı denir.
- ❖ $f(x) = ax + b$ ve $g(x) = cx + d$ lineer fonksiyonların eğimleri birbirine eşit (a = c) ise, lineer fonksiyonların grafikleri birbirine paraleldir.
- ❖ $f(x) = ax + b$ ve $g(x) = cx + d$ lineer fonksiyonların serbest terimleri aynı (b = d) ise, lineer fonksiyonların grafikleri ordinat ekseninde aynı noktada kesişiyorlar.
- ❖ $f(x) = ax + b$ lineer fonksiyonunda serbest terim $b = 0$ ise, lineer fonksiyonun grafiği koordinat başlangıcından geçer.
- ❖ $f(x) = ax + b$ lineer fonksiyonun monotonluğu için şunları diyebiliriz:

  –$a > 0$ ise, monoton artandır, yani herhangi iki reel sayı
  $x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

  – $a < 0$ ise, monoton eksilendir, yani herhangi iki reel sayı
  $x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- ❖ $f(x) = ax + b$ lineer fonksiyonunda $a = 0$ ise, fonksiyon sabittir.

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Verilen lineer fonksiyonların koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını bulunuz:

a) $y = -\frac{1}{2}x + 1$; b) $y = 5x - 3$; c) $y = x - \frac{1}{7}$.

2. $y = (k + 1)x - 3$ lineer fonksiyonu veriliyor. k parametresini o şekilde belirtiniz ki:

a) lineer fonksiyonun sıfırı $x = 3$ olsun;

b) lineer fonksiyonun grafiği, birinci ve üçüncü dördülün simetraline paralel olsun;

c) lineer fonksiyon artan olsun;

ç) lineer fonksiyon eksilen olsun;

d) lineer fonksiyon sabit fonksiyon olsun.

3. $y=(2k+1)x-1$ lineer fonksiyonu, k parametresinin herhangi bir değeri için koordinat başlangıcından geçer mi?

4. k parametresinin hangi değeri için, $y = (2k + 1)x - k$ ve $y = 2x - 1$ lineer fonksiyonların her ikisinin grafikleri ordinat ekseninde aynı noktada kesişir?

5. k parametresinin hangi değeri için, $y = (2k + 1)x - k$ ve $y = (2 - k)x - 1$ lineer fonksiyonların grafikleri paralel doğrulardır?

3. Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi

3.1. Birinci dereceden (lineer) iki bilinmeyenli denklem kavramı

Eşitlik, özdeşlik ve denklem kavramları artık incelenmiştir. Burada şimdi yeniden denklemlere dönüyoruz.

- $3x-2y=8$, $x+y=-2$ denklemleri, x ve y olmak üzere iki bilinmeyenli birinci dereceden (lineer) denklemdir.
- $3x-2y=8$ iki bilinmeyenli lineer denklemin $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde çözümleri $(4,2)$, $(6,5)$,…. sıralı çiftleridir, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinde $(4,2)$, $(6,5)$, $(0,-4)$, $(-2,7)$... sıralı çiftleridir.
- Görüldüğü gibi, iki bilinmeyenli lineer denklemin sonsuz çok çözümleri vardır, yani belirsizdir.

1 $x+y=-2$ iki bilinmeyenli lineer denklemin $\mathbb{Z}$ kümesinde birkaç çözümü bulunsun.

!

❖ $ax+by=c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ şeklinden denklem iki **bilinmeyenli lineer** (birinci dereceden) denklemdir. Burada a, b sayılarına bilinmeyenler önündeki katsayılar, c sayısı serbest terimdir, x ve y iki bilinmeyenli lineer denklemin bilinmeyenleridir.

İki bilinmeyenli lineer denklemin çözümleri ve iki bilinmeyenli lineer denklemin normal (en sade) şekli için aşağıdakiler doğrudur:

!

❖ İki bilinmeyenli lineer denklemi çözmek, $ax+by=c$ denklemini doğru sayı eşitliğine dönüştürecek mümkün değerlerden bir (x_0, y_0) reel sayılı sıralı çiftin bulunması demektir, yani $ax_0+by_0=c$ doğru sayı eşitsizliğidir. İki bilinmeyenli lineer denklemin sonsuz çok çözümleri vardır, yani denklem belirsizdir.

❖ İki bilinmeyenli lineer denklemin $ax+by=c$ şekline **iki bilinmeyenli lineer denklemin en sade şekli** ya da **genel şekli** denir.

❖ İki bilinmeyenli lineer denklem genel şekilde değilse, ona denk dönüşümler uygulayarak genel şekle dönüştürülür.

❖ Aynı tanım kümesinde tanımlı olan, bir iki bilinmeyenli lineer denklem diğer bir iki bilinmeyenli lineer denklem ile **denk** olmaları için birinin her çözümü diğerinin de çözümü olmalıdır.

Not: İki bilinmeyenli lineer denkleme denk olan diğer bir lineer denklemin bulunmasında kullanılan yöntemler, önceki modüler birimde bir bilinmeyenli lineer denklemlerde yapılan işlemlerle aynıdır.

Örnek 1. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ iki bilinmeyenli lineer denklemi $3x + 2y = 6$ iki bilinmeyenli lineer denklemi ile denktir. Elde edilen iki bilinmeyenli lineer denklem genel (normal) şekildedir.

2 $\frac{x+y}{2}=\frac{1}{5}$ iki bilinmeyenli lineer denklemi genel şekle dönüştürünüz.

3.2. Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi

Bazı problemleri çözerken çok kez birinci dereceden iki bilinmeyenli iki denklemin ortak çözümü istenilebilir.

!

❖ Ortak çözümü istenen birinci dereceden iki bilinmeyenli iki denklemin kümesine **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir;

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

(birinci dereceden iki tane iki bilinmeyenli denklemin tümel evetlemesi söz konusudur) $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. a_1, a_2, b_1, b_2 sayılarına bilinmeyenler önündeki katsayılar, c_1, c_2 sayıları ise sistemin serbest terimleridir.

Örnek 2. Kire ve Beni pazara beraber gitmişler. Kire 2 kg elma ve 3 kg erik satın alarak 190 denar harcamıştır. Beni aynı elmalardan 3 kg ve aynı eriklerden 5 kg satın almış ve bunlar için 300 denar harcamıştır. 1kg elma ve 1 kg eriğin fiyatı ne kadarmış?

Bu ödevi çözmek için, iki bilinmeyenli birinci dereceden iki denklem oluşturduktan sonra onların ortak çözümünü bulmalıyız. Bu nedenle 1 kg elmanın fiyatı x denar, 1 kg eriğin fiyatı y denar olsun. Kire'nin yaptığı alışverişten $2x + 3y = 190$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemi oluşturulur. Beni'nin yaptığı alışverişten de $3x + 5y = 300$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemi elde edilir. Ödevi çözmek için, bu iki tane birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin ortak çözümünü bulmalıyız. Bu iki denklemden birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi oluşur:

$$\begin{cases} 2x+3y=190 \\ 3x+5y=300 \end{cases}$$

Düşününüz ve cevaplayınız:

- Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin daima bir tek çözümü var mıdır?

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü için şunlar doğrudur:

!

❖ **Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü**:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

sistemindeki her iki denklemi doğru sayı eşitsizliğine dönüştüren, yani

$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0=c_1 \\ a_2x_0+b_2y_0=c_2 \end{cases}$ tanım kümesine ait her (x_0, y_0) reel sayılar sıralı çiftidir.

❖ Sistemin bir tek çözümü vardır (sistem bellidir), çözümü yoktur (sistem aykırıdır) ya da sonsuz çok çözümü vardır (sistem belirsizdir).

❖ Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ şekline, **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin genel şekli** denir.

❖ Birinci dereceden iki bilinmeyenli iki tane denklem sistemi aynı tanım kümesinde birbirine denktir, eğer birinci sistemin her çözümü, aynı zamanda ikinci sistemin de çözümü ise

❖ Verilen sistemde, denklemlerden birine denk dönüşümler yapmakla elde edilen yeni sistem verilene denktir.

❖ Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi genel şekilde olmadığı durumda, verilene denk sistemlerden yararlanarak sistem genel şekle dönüşebilir.

Örnek 3. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}=3 \\ \dfrac{x+y}{3}=-2 \end{cases}$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi genel şekilde değildir, halbuki onu şu şekilde genel şekle dönüştüreceğiz:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}=3/\cdot 2 \\ \dfrac{x+y}{3}=-2/\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ x+y=-6 \end{cases}$$

3 $(0,0),(-1,2),(1,-2)$ sıralı çiftlerden hangileri $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$? birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümüdür?

4 Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri genel şekle (en sade şekilde) dönüştürünüz:

a) $\begin{cases} 2(x-y)+\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x+y}{3}-3(x-y)=\dfrac{1}{5} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+\dfrac{x-y}{5}=\dfrac{y}{2} \\ \dfrac{y}{3}-3=\dfrac{x}{5} \end{cases}$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. $x-y=-3$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemin çözümü olan birkaç tam sayılı sıralı çift belirtiniz.

2. $\dfrac{x-y+1}{2}=\dfrac{5}{6}$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemi genel şekle dönüştürünüz.

3. $(-3,5),(2,-3),(1,1)$ sıralı çiftlerden hangisi $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$? birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümüdür.

4. Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri en sade şekle (genel şekle) dönüştürünüz

a) $\begin{cases} 3(x+y)-\dfrac{y}{7}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x-y}{2}+3(x+y)=\dfrac{5}{7} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2\dfrac{x-y}{7}+\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-2y}{5}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{y}{2} \end{cases}$.

4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemin Çözümü: Yerine Koyma Metodu ve Yok Etme (ters katsayılar) Metodu

4.1. Yerine Koyma Metodu

MetBirinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemini yok etme metoduyla çözmek için sistem en sade şekilde yani $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$. genel şekilde olmalıdır. Bu şekilde olmadığı durumda, birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi genel şekilde dönüştürülür.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi yerine koyma metoduyla çözmek için, denklemlerden birinden bilinmeyenlerden biri diğeriyle ifade edilir. Ondan sonra bu ifade diğer denklemde yerine koyulur. Bu şekilde verilen sisteme denk olan sistem elde edilir.

Örnek 1. $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi yerine koyma metoduyla çözelim:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+y \\ 3+y+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+y \\ 2y=-4/:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+y \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

sıralı çifti verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümüdür.

1 Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri yerine koyma metoduyla çözünüz;

a) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -3x+2y=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0 \\ x+y=5 \end{cases}$.

4.2. Yok Etme (Ters Katsayılar) Metodu

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi **yok etme ya da ters katsayılar metoduyla** çözmek için, sistem $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ genel şekilde olmalıdır. Bu şekilde olmadığı durumda, birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemine denk dönüşümler yaparak en sade şekilde, yani genel şekilde dönüştürülür.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemini **yok etme metoduyla** ya da **ters katsayılar metoduyla çözmek** için, bilinmeyenlerden birinin önündeki katsayıları ters sayılar olmalıdır. Ters sayılar olmadığı durumda denk dönüşümler yaparak değişkenlerden birinin önündeki katsayılar ters olacak şekilde dönüştürülür. Ondan sonra denklemler toplanır. Bu şekilde bir bilinmeyenli birinci dereceden denklem elde edilir. Bu denklemi çözmekle, bilinmeyenlerden birini bulmuş oluyoruz. Elde edilen bu değeri sistemdeki denklemlerden birinde değiştirmekle ikinci bilinmeyen de belirtilir.

Örnek 2. Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-2 \end{cases}$ sistemini yok etme metoduyla çözelim. Görüldüğü gibi, y değişkeni önündeki katsayılar ters sayılardır. İki denklemi taraf tarafa toplamakla elde edilen denklemi sistemin birinci denklemi olarak yazıyoruz, sistemin ikinci denklemi ise verilen sistemin denklemlerinden biri seçilir. Bu şekilde verilene denk olan sistem elde edilir:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2/:2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$(1, -2)$ sıralı çifti verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümüdür

2 Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri ters katsayılar metoduyla çözünüz:

a) $\begin{cases} 3x+y=1 \\ -7x+2y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \\ x-y=3 \end{cases}$.

Örnek 3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-1 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}$ sistemi, iki bilinmeyenli denklemler sistemidir. Bunu çözmek için, $u=\dfrac{1}{x}, v=\dfrac{1}{y}$ · gibi yeni değişkenler alacağız. Seçilen yeni değişkenlerle verilen sisteme denk olan $\begin{cases} u+v=-1 \\ u-v=2 \end{cases}$,birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi bilinen yöntemlerden biri ile çözmekle, $\left(2,-\dfrac{2}{3}\right)$. çözümü elde edilir.

3 Verilen $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ sistemi yeni değişkenlerle değiştirerek çözünüz.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen sistemleri iki yöntemden biri ile çözünüz:

a) $\begin{cases} 2,2x-3,3y=-1,1 \\ 4,4x+6,6y=11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3(x-y)-y=2(x-5) \\ 2(x+2y)+13=3x-y+5 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (x-2)^2+(1+2y)^2=x^2+4y^2 \\ (2x+1)^2-(3-2y)^2=4(x^2-y^2) \end{cases}$; ç) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+1}{3}+\dfrac{x-3y+4}{2}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x+y-1}{2}-\dfrac{1-x-y}{5}=\dfrac{3}{10} \end{cases}$.

2. Yardımcı değişkenler kullanarak verilen sistemleri çözünüz.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{7} \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

5. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemin Çözümü: Gauss Metodu ve Grafiksel Metot

5.1. Gauss Metodu

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerin sadeleştirilmesinde ve daha uygun sistemlerin elde edilmesinde uygulanan denk dönüşümler şunlardır:

a) denklemlerin yerlerinin değiştirilmesi;

b) denklemlerden biri sıfırdan farklı bir sayıyla çarpılıp diğer denkleme katılması;

Normal şekilde birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi verilmiş olsun:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}.$$

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemini Gauss metoduyla çözmek, aslında sistemden bir bilinmeyenin kademeli olarak yok edilmesidir. Bu yüzden bu yönteme **Gauss yok etme metodu** denir. Verilen başlangıç sisteme, denk dönüşümler yaparak denklemlerden birinde bir bilinmeyenin bulunmadığı sistem elde edilir. Elde edilen yeni sistem, verilen ilk sistemle denktir.

Örnek 1. Verilen $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemini Gauss metoduyla çözelim:

a) birinci denklemi -1 ile çarparak ikinci denkleme katıyoruz,

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=-1 \,/\, R_1(-1)+R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ -3y=-3 \end{cases}$$

Bu şekilde x değişkeni yok olmuştur;

b) ikinci denklemi -3 ile bölmekle y bilinmeyeni belirtilir,

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -3y=-3/:(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

c) y değerini birinci denklemde değiştirmekle x bilinmeyenin de değeri elde edilir,

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Sistemin çözümü $(1,\ 1)$ elde edilir.

x değişkeninin yok edilmesi mecburi değildir, y değişkeni de yok edilebilir,

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=-1 \,/\, 2R_1+R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 3x=3/:3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}.$$

Not: Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi normal şekilde verilmemişse, Gauss yöntemini uygulamak için, sistemi normal şekilde dönüştürmeliyiz.

1 Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemini Gauss metoduyla çözünüz:

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=3 \end{cases};$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-y=-1 \\ x+\dfrac{y}{2}=6 \end{cases}.$

5.2. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemin Grafiksel Çözümü

Bilindiği gibi, $y = ax + b$ cinsinden fonksiyon lineer fonksiyondur ve onun grafiği bir doğrudur. sistemi ise. birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin normal (en sade) şeklidir.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

!

❖ **Birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemin grafiksel çözümü**, aslında her iki denklemde *y* değişkenini *x* değişkeninin bir fonksiyonu olarak ifade ederek, iki lineer fonksiyonun grafiklerinin çözümüdür.

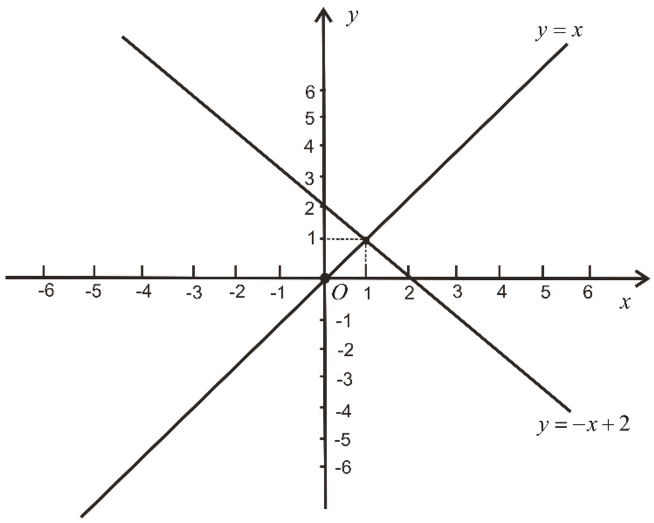
Not: Bu yöntemi kullanmak için birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi normal şekilde olması gerekir, aksi halde verilen sistem, önce birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemi normal şekilde dönüştürülmelidir.

Örnek 2. Verilen $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemini grafiksel şekilde çözelim. Çözümün aşamaları:

a) Sistemdeki her denklemde y ifade ediliri,

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x \end{cases}.$$

b) Aynı koordinat sisteminde her iki lineer fonksiyonun grafiği çizilir,



c) İki doğrunun kesişimi $(1,\ 1)$ noktasındadır. Bu ise birinci derece iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümüdür.

> ❖ **Birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemin grafiksel çözümü**, sistemin bir tek çözümü olduğu durumda, verilen lineer fonksiyonların grafikleri olan iki doğrunun kesişiminden elde edilir.
>
> ❖ Sistemin sonsuz çok çözümleri olduğu durumda grafikler çakışık durumda olacaktır.
>
> ❖ Sistemin çözümü yoksa, grafikler paralel doğrular olacaktır.

2 Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri grafiksel metotla çözülsün:

a) $\begin{cases} x-y=-1 \\ -x+3y=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-y=-1 \\ x+\dfrac{y}{2}=6 \end{cases}$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri Gauss metoduyla çözünüz:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \\ x-y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+1}{3}+\dfrac{x-3y+4}{2}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x+y-1}{2}-\dfrac{1-x-y}{5}=\dfrac{3}{10} \end{cases}$.

2. Verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri grafiksel şekilde çözünüz:

a) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x-y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \\ x-y=3 \end{cases}$.

6. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerin Kramer Kurallarıyla Çözümü

6.1. İkinci Dereceden Determinantlar

İkinci dereceden determinant kavramını tanıtalım, ondan sonra onun değerinin nasıl hesaplandığını görelim.

!

❖ **İkinci dereceden determinant** aslında bir kare şemasıdır ve değeri şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

burada a_1, a_2, b_1, b_2 reel sayılardır ve ikinci dereceden determinantta iki satırda ve iki sütunda sıralı durumda bulunuyorlar.

Örnek 2. Verilen ikinci dereceden determinantı hesaplayalım:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 5 + 6 = 11 .$$

1 Verilen ikinci dereceden determinantları hesaplayınız:

: a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

6.2. Kramer Kuralları

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi normal şekilde verilmiş olsun

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Bu sistemi çözelim. Bunun çözümünü önceden incelediğimiz birçok yöntemle bulabiliriz (grafiksel metot hariç). Burada ters katsayılar metodunu uygulayacağız.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \;/\cdot(-a_2) \\ a_2x+b_2y=c_2 \;/\cdot a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1a_2x-b_1a_2y=-c_1a_2 \\ a_1a_2x+b_2a_1y=c_2a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ (b_2a_1-b_1a_2)y=c_2a_1-c_1a_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1\dfrac{c_2a_1-c_1a_2}{b_2a_1-b_1a_2}=c_1 \\ (b_2a_1-b_1a_2)y=c_2a_1-c_1a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b_2a_1-b_1a_2)x=c_1b_2-c_2b_1 \\ (b_2a_1-b_1a_2)y=c_2a_1-c_1a_2 \end{cases}$$

Son sistemde görüldüğü gibi şu determinantların değerleri elde edilmiştir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_1-b_1a_2, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=b_2c_1-b_1c_2, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=c_2a_1-c_1a_2 .$$

Bunları $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ile işaret edeceğiz. Buna göre, birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemin, determinantlarla da çözülmesi mümkün olduğunu görüyoruz.

!

❖ $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ birinci derece iki bilinmeyenli denklem $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ sistemi determinantları hesaplayarak çözebiliriz.

Çözümü, **Kramer kuralları** diye tanınan $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}, \Delta\neq 0$,

formüllerle buluyoruz. Burada:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Örnek 2. $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi Kramer kuralına göre çözünüz:

a) Determinantların değerlerini hesaplayalım:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0, \Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-4, \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-4$$

b) Çözümler: $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-4}{-2}=2, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-4}{-2}=2$.

c) $(2,2)$ sıralı çifti $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$. sistemin çözümüdür.

2 Kramer kuralları yardımıyla şu sistemleri çözünüz:

a) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x-y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=2 \\ x-y=-2 \end{cases}$.

6.3. Birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemin çözümlerinin incelenmesi

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin bir tek çözümü olabilir (sistem bellidir), sonsuz çok çözümleri olabilir (sistem belli değildir) ve çözümü olmayabilir (sistem aykırıdır).

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemi için Kramer kurallarını

$\Delta \cdot x=\Delta_x, \Delta \cdot y=\Delta_y$ şeklinde yazalım. Bu şekilde, birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemin çözümleri için inceleme yapabiliriz:

- $\Delta \neq 0$ olmak üzere, $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ durumunda birinci derece iki bilinmeyenli denklem sisteminin **bir tek çözümü** vardır (sistem bellidir).

  $\Delta \neq 0$ koşulundan, yani $b_2a_1-b_1a_2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ dir (bir bilinmeyenin katsayılarının oranı, diğer bilinmeyenin katsayılarının oranıyla eşit değilse sistemin bir tek çözümü vardır).

- $\Delta = 0$ olduğu durumda, yani $b_2a_1-b_1a_2=0 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ (bir bilinmeyenin katsayılarının oranı, diğer bilinmeyenin katsayılarının oranıyla eşit) ise, birinci derece iki bilinmeyenli denklem sisteminin **sonsuz çok çözümleri** vardır (belirsiz durum) ve:

  sistemin çözümü yoktur (sistem aykırıdır) eğer, Δ_x, Δ_y determinantlarından en az biri sıfırdan farklı ise. $\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0$ yani

$$b_2c_1-b_1c_2 \neq 0 \vee c_2a_1-c_1a_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \vee \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

  (bir bilinmeyenin katsayılarının oranı, diğer bilinmeyenin katsayılarının oranıyla eşit fakat serbest terimlerin oranıyla eşit değilse sistemin çözümü yoktur).

b) **Sistemin sonsuz çok çözümleri vardır (belirsiz sistem)**, eğer her iki determinant Δ_x, Δ_y sıfıra eşit, yani $\Delta_x = 0 \wedge \Delta_y = 0$ veya

$$b_2c_1 - b_1c_2 = 0 \wedge c_2a_1 - c_1a_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$ ise (bir bilinmeyenin katsayılarının oranı,

diğer bilinmeyenin katsayılarının oranıyla eşit ve aynı zamanda serbest terimlerin oranıyla da eşit ise sistemin sonsuz çok çözümleri vardır).

Örnek 3. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$. birinci derece iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümlerini inceleyelim.

Determinantlar: $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1, \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$.

– Sistemin bir tek çözümü vardır eğer, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}$

$\Delta = a^2 - 1 \neq 0$ yani $a \neq \pm 1$.

– Sistemin sonsuz çok çözümleri vardır eğer, $\Delta = a^2 - 1 = 0$, yani $a = + 1$.

$a = 1$ için, sistemin determinantları $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0$, sistemin sonsuz çok çözümleri vardır.

$a = -1$ için, sistemin determinantları $\Delta = 0, \Delta_x = -2 \neq 0, \Delta_y = -2 \neq 0$, sistemin çözümü yoktur.

İnceleme, determinantları hesaplamadan da yapılabilir.

– Sistemin bir tek çözümü vardır eğer $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - 1 \neq 0$.

– Sistemin çözümü yoktur, eğer $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1} \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \wedge a = 1 \Rightarrow a = 1$.

– Çözüm yoksa $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \wedge (\frac{a}{1} \neq \frac{1}{1} \vee \frac{1}{a} \neq \frac{1}{1}) \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \wedge a \neq 1 \Rightarrow a = -1$.

3 Verilen sistemlerin çözümlerini inceleyiniz:

a) $\begin{cases} ax - y = a \\ (1-a)x + y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (1+a)x - y = a \\ (1-a)x + y = 1 - a \end{cases}$.

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Verilen ikinci dereceden determinantları hesaplayınız:

a) $\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0,687 & 2,5 \\ 3,52 & -0,33 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{a^3-1} \\ a^2+a+1 & a+1 \end{vmatrix}$.

2. Verilen sistemleri Kramer kurallarına göre çözünüz:

a) $\begin{cases} \frac{x-y}{3}+\frac{x+y}{5}=2 \\ \frac{x-y}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{x}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} (x-5)^2+(2y+3)^2=x^2+4y^2-2 \\ (x-3)(x+3)-(y+2)(y-2)=x^2-y^2-5x-y \end{cases}$.

3. Verilen sistemlerin çözümlerini inceleyiniz:

a) $\begin{cases} ax-(1-a)y=a \\ 2x+3y=-a \end{cases}$; b) $\begin{cases} (a-b)x+2y=1 \\ (a+b)x+y=2 \end{cases}$.

7. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemin Uygulanması

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi günlük hayattan problemlerde, teknikten ödevlerde ve bilimden ödevlerde çok sık kullanılmaktadır. Burada birkaç örneği inceleyeceğiz.

Örnek 1. Baba ve oğlun bugünkü yaşlarının toplamı 65 dir. İki yıl sonra babanın yaşı oğlunun yaşının iki katı olacaktır. Baba ve oğlunun şimdiki yaşları ne kadardır?

Babanın yaşını x, oğlunun yaşını y ile işaret edelim. Birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemini oluşturmak için aşağıdaki tablodan yararlanacağız:

Şema	**Şimdiki yaşı**	**2 yıl sonraki yaşı**
Baba	x	$x + 2$
Oğul	y	$y + 2$

Şemadaki verilere göre ve ödevdeki metine göre şunları tespit edebiliriz:

1) Baba ve oğlunun şu andaki yaşları için: $x + y = 65$ denklemini yazabiliriz;
2) 2 yıl sonra baba ve oğlunun yaşlarını $x + 2 = 2 \cdot (y + 2)$ denklemiyle ifade edebiliriz.

3) Buna göre $\begin{cases} x+y=65 \\ x+2=2(y+2) \end{cases}$ sistemi elde edilir.

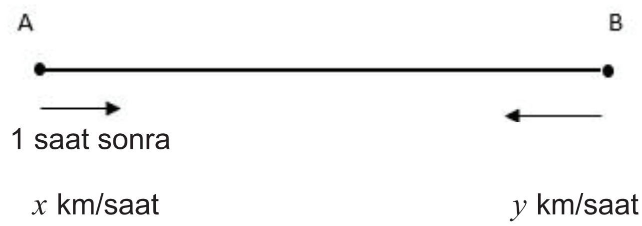
Bu sistemi önceden öğrendiğimiz herhangi bir metot ile çözerek, çözüm $(44, 21)$ elde edilir.

Ödevin cevabı olarak şunu elde ettik: Babanın şimdiki yaşı 44, oğlunun ise yaşı 21 dir.

1 Dede ve torunun yaşları toplamı 80 dir. 5 yıl önce dedenin yaşı, torunun yaşının 13 katıymış. Her birini yaşı ne kadardır?

Örnek 2. Aralarındaki uzaklık 300 km olan iki kent A ve B den iki motosikletli birbirine karşılaşacak şekilde hareket ediyorlar. A kentinden hareket eden motosikletli, B kentinden hareket eden motosikletliden 1 saat sonra hareket etmiş ve 2 saat sonra yolun yarısında buluşuyorlar. A kentinden hareket eden motosikletli hızını 15km /saatte azaltıyorsa, diğeri ise 10km/saatte arttırırsa, onlar aynı anda hareket edecek ve $2{,}5$ saat sonra yolun yarısında buluşacaklar. Her biri ne kadar hızla hareket etmiştir?

A kentinden hareket eden motosikletlinin hızı x km/saat, B kentinden hareket eden motosikletlinin hızı y km/saat olsun. Birinci derece iki bilinmeyenli denklem sistemini kurmak için şu çizimi yapacağız:



A kentinden hareket eden motosikletli, B kentinden hareket eden motosikletliden 1 saat sonra hareket etmiş ve 2 saat sonra yolun yarısında buluştuklarına göre $2x+3y=300$ denklemini yazabiliriz. A kentinden hareket eden motosikletli hızını 15km /saatte azaltıyorsa, diğeri ise 10km/saatte arttırırsa, onlar aynı anda hareket edecek ve $2{,}5$ saat sonra yolun yarısında buluştuklarına göre: $2{,}5(x-15)+2{,}5(y+10)=300$ denklemi elde edilir. Buna göre şi sistemi elde ediyoruz: $\begin{cases} 2x+3y=300 \\ 2,5(x-15)+2,5(y+10)=300 \end{cases}$, Bunun çözümü $(75,\ 50)$ dir. Buna göre: A kentinden hareket eden motosikletlinin hızı 75 km/saat, B kentinden hareket eden motosikletlinin hızı 50 km/saat olduğunu buluyoruz.

2 Yolcu treni saat 7 de Üsküp'ten Novi Sad yönünde hareket ediyor. İki saat sonra aynı yönde hızlı tren hareket etmiş ve 12 saat sonra yolcu trenini yetişmiştir. Hızlı tren Novi Sad'da sat 18 de yetiştiği anda yolcu treni Novi Sad'dan 160 km uzaklıkta bulunuyormuş. Her iki trenin hızı ne kadarmış? Yolcu

treni Novi Sad'da ne zaman yetişmiştir? Üsküp ve Novi Sad arasındaki uzaklık ne kadardır?

Örnek 3. İki doğal sayı bölündüğünde, bölüm 2 ve kalan 9 elde edilir. Bölünen 5 artarsa ve aynı bölenle bölünürse, bölüm 3 olarak kalansız bölme elde edilir. Bunlar hangi sayılardır?

Bölüneni x ile, böleni ise y ile işaret edelim. Birinci denklem $x = 2y + 9$ dur. Bölünen 5 artarsa ve aynı bölenle bölünürse, bölüm 3 olarak kalansız bölme elde edildiğine göre: $x + 5 = 3y$ denklemi elde edilir. Bu şekilde şu sistem elde edilir: $\begin{cases} x = 2y + 9 \\ x + 5 = 3y \end{cases}$ Bunun çözümü $(37, 14)$ ikilisidir. Buna göre, bölünen 37, bölen ise 14 tür.

3 İki sayının farkı 75, bölümü ise4 tür. Bunlar hangi sayılardır?

Örnek 4. İki işçi Slavçe ve Halil bir işi 12 günde bitirebilirler. 5 gün beraber çalıştıktan sonra biri hastalanmış ve kalan işi diğer işçi daha $17{,}5$ gün yalnız başına çalışarak bitirmiştir. Bu işi her biri yalnız başına çalışarak kaç günde bitirebilir?

Slavçe bu işi kendi başına x günde, Halil ise y günde bitirmiş olsun. Ödevdeki verilere göre şu sistemi kurabiliriz:

$$\begin{cases} \dfrac{12}{x} + \dfrac{12}{y} = 1 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{17{,}5}{y} = 1 \end{cases}.$$

$u = \dfrac{1}{x}, v = \dfrac{1}{y}$ yeni bilinmeyenleri seçmekle:

$$\begin{cases} 12u + 12v = 1 \\ 5u + 5v + 17{,}5v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12u + 12v = 1 \\ 5u + 22{,}5v = 1 \end{cases}.$$

sistemi elde edilir. Bu sistemi çözmekle $u = \dfrac{1}{20}, v = \dfrac{1}{30}$ elde edilir. Geriye dönerek bu değerler yerlerine değiştirilirse, Slavçe bu işi $x= 20$ günde, Halil ise 30 günde bu işi kendi başına bitirebilir.

4 Bir havuz iki borudan dolar. Her iki boru aynı anda açıldığı durumda, havuz 12 saatte dolar. Her iki boru 6 saat açık olduktan sonra ikinci boru kapanıyor. Birinci boru havuzu doldurmaya devam ederek 9 saat sonra havuz doluyor. Her boru ayrı ayrı havuzu kaç saatte doldurur?

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Bir kesrin pay ve paydası 2 artarsa $\frac{9}{11}$ kesri elde edilir. Kesrin pay ve paydasından 2 çıkarılırsa $\frac{5}{7}$ kesri elde edilir. Bu, hangi kesirdir?
2. Bir iki basamaklı sayının rakamları toplamı 15 dir. Bu sayı ve aynı rakamlarla fakat ters yönde yazılan iki basamaklı sayı ile farkı 9 dur. Hangi iki basamaklı sayı söz konusudur?
3. Bir köylünün tavukları ve inekleri varmış. Bunların toplam 27 baş ve 84 ayağı olduğuna göre, köylünün kaç tavuğu ve kaç ineği varmış?
4. İki sayının bölümünde, bölüm 174 ve kalan 2 dir. Bölünenin iki katı ve 250 ile çarpılan bölenin farkı 298 dir. Bunlar hangi sayılardır?
5. A kentinden B kentine iki otomobil sırasıyla 60 km/saat ve 90 km/saat hızla hareket ediyorlar. Birinci otomobil A kentinden 3 saat önce hareket ettiğine göre, B kentine her iki otomobil aynı anda yetişiyorlar. Her biri kaçar saat yolculuk yapmıştır? Kentler arasındaki uzaklık ne kadardır?
6. Anne ve kızın bugünkü yaşlarının farkı 28 yıldır. Beş yıl sonra annenin yaşı kızının yaşının 5 katı olacaktır. Anne ve kızının yaşları ne kadardır?
7. Bir havuz 2 borudan dolar. Birinci boru 4 saat açık, ikinci boru ise 3 saat açık olduğunda havuzun $\frac{3}{4}$ kısmı dolar. Birinci boru 2 saat, ikinci boru da 1 saat açık olduğu durumda havuzun $\frac{1}{3}$ kısmı dolacaktır. Her boru ayrı ayrı havuzu kaç saatte doldurabilir?
8. Uzaklığı 60km olan İştip ve Kavadar ketlerinden birbirine kavuşmak üzere iki bisikletli hareket ediyor. Birinci bisikletli ikincisinden 10 dakika önce hareket etmiştir. İkinci bisikletlinin hareket ettiğinden 50 dakika sonra, bisikletliler arasındaki uzaklık 6 km kalmıştır. İlerdeki 30 dakika birbirini geçerek aralarındaki uzaklık 3,8 km olmuştur. Bisikletlilerin hızları ne kadarmış?

8. Modüler Birime Ait Pekiştirme Alıştırmaları

1. $y = (k-1)x - (3-k)$ lineer fonksiyonu verilmiştir. k parametresini o şekilde belirtiniz ki:

a) lineer fonksiyonun sıfırı $x = 1$ olsun;

b) lineer fonksiyonun grafiği ikinci ve dördüncü dördülün simetraline paralel olsun;

c) lineer fonksiyon artan olsun;

ç) lineer fonksiyon eksilen olsun;

d) lineer fonksiyon sabit fonksiyon olsun.

2. k parametresinin hangi değeri için $y = (3k-1)x - (k-3)$, $y = 2x + k$ lineer fonksiyonların grafikleri ordinat eksenini aynı noktada kesiyorlar?

3. Verilen sistemleri normal (en sade) şekilde dönüştürünüz:

a) $\begin{cases} 3(x-y)+3=2(y+1) \\ 2(x-5)-3(y+8)=-30 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{y+1}{3} \\ \dfrac{x+1}{5}-\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3 \\ x+y=2-x \end{cases}$ sistemini yerine koyma metoduyla çözünüz.

5. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{5}-\dfrac{y}{3}=-2 \\ x-y=2 \end{cases}$ sistemini ters katsayılar (yok etme) metoduyla çözünüz.

6. $\begin{cases} 2(x-y)+2y= \\ 5(x-3y)-1 \end{cases}$ sistemini Gauss metoduyla çözünüz.

7. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ sistemini grafiksel yöntemle çözünüz.

8. $\begin{cases} 2,2x-3,3y=-1,1 \\ 4,4x+6,6y=11 \end{cases}$ sistemini Kramer kurallarıyla çözünüz.

9. $\begin{cases} kx+y=k-1 \\ x+y=3 \end{cases}$ sisteminin çözümlerini k parametresinin değerlerine bağlı olarak inceleyiniz.

10. a) Bir iki basamaklı sayının rakamları toplamı 7 dir. Bu sayı ve aynı rakamlarla fakat ters yönde yazılan iki basamaklı sayı arasındaki fark 27 olduğuna göre, hangi sayı söz konusudur?

b) Depomuzda %25 ve %75 olmak üzere iki cins rakı vardır. Her birinden kaçar litre almalıyız ki 50 litre %50'lik rakı elde edilsin ?

7

DÜZLEMDE GEOMETRİK ŞEKİLLER

MODÜLER BİRİMİN HEDEFLERİ

Bu modüler birimini incelemekle öğrenci şu kazanımları elde etmelidir:

- Temel ve türetilmiş kavramları fark etmelidir;
- Düzlemde noktalar ve doğruların durumlarını anlamalıdır;
- Düzlemsel geometrik şekilleri tanımlamalıdır;
- Pratik problemlerde düzlemsel geometrik şekillerin özelliklerini bilmeli ve kullanmalıdır.

MODÜLER BİRİM 7’NIN İÇİNDEKİLERİ

Geometri, şekillerin bilimi olarak sayılabilen matematiğin bir dalıdır. Geometri, daha m.ö. altıncı asırda, uzunluk, alan ve hacim gibi kavramların bilindiği, arazilerin pratik ölçülmesinde bazı ihtiyaçların sağlanması için eski Mısırda, Babil ve antik Yunanistan'da ortaya çıkan en eski bilimlerden biridir. Geometrik çizimleri Hindistanlılar m.ö. üçüncü asırda bile kullanmıştırlar ve bunlara bağlı olmadan Euklid, geometriye aksiyomatik şekil vererek onun adına bu geometriye Euklit geometrisi denilmiştir. Asırlar boyunca geometri gelişmiş ve bu günkü şeklinde bilim insanların ve uygulayıcıların inceleme ve çalışma için geniş alanı olmuştur.

1. Temel ve Türetilmiş Kavramlar ve İddialar

1.1. Temel ve türetilmiş kavramlar

Geometriyi incelerken, **bilinenden bilinmeyene** ilkesine göre hareket ediyoruz. Bu nedenle herhangi bir yeni geometrik terimi tanımlarken, artık bilinen geometrik terimlerini kullanıyoruz. Bu şekilde yeni geometrik kavramını getiren tutuma **tanım** denir.

!

❖ Bir kavramı belirlemek için, zaten bilinen diğer bir kavramı kullanarak açıklayan tümce **tanımdır.**

Geometride iki çeşit geometri kavramı fark ediyoruz: **temel ve türemiş kavramlar.**

Temel kavramlarla Euklit geometrisinin kuruluşu başlamıştır ve bunlar tanımsız olarak kabul edilmiş, yani sezgisel olarak kavramın açıklanmasıyla ya da örnekler vererek kabul edilmiş kavramlardır.

Türetilmiş kavramlar, tanımlanan kavramlardır. Bunları tanımlamak için, temel kavramlar ya da önceden tanımlanmış bazı türetilmiş kavramlar kullanılır.

Düzlemde tanımsız kabul edilen temel kavramlar: nokta, doğru ve uzaklık. Halbuki düzlem kavramı da tanımsız kabul edilen temel kavramdır. Şunları da biliyoruz:

- Noktalar Latin alfabesinin büyük harfleriyle işaretlenir $A, B, C,$ ....
- doğrular Latin alfabesinin küçük harfleriyle işaretlenir $a,\ b,\ c,$ ....
- Düzlemler Yunan alfabesinin harfleriyle işaretlenir $\alpha, \beta, \Sigma, \pi,$ ….
- A ve B aynı noktayı belirtiyorsa $A \equiv B$ biçiminde yazılır (oku: A denktir B)

Örnek 1.

a) Türetilmiş kavram olarak doğru parçasını şu tanımla tanımlayacağız: " İki nokta ile sınırlanan ve sınır noktalarını içeren doğrunun kısmına doğru parçası denir".

Görüldüğü gibi, “doğru parçası” türetilmiş kavramını tanımlamak için, nokta ve doğru temel kavramlarından yararlanılmıştır.

b) Türetilmiş kavram “çember” için şu tanım veriliyor: “Düzlem üzerinde sabit bir O noktasından eşit uzaklıkta bulunan düzlemin noktalarının kümesi çemberdir”.

Görüldüğü gibi, “çember” türetilmiş kavramını tanımlamak için, nokta ve uzaklık temel kavramlarından yararlanılmıştır. Küme kavramı da matematikte tanımı olmayan temel kavramdır.

Noktalar kümesi yerine, çok kez noktaların geometrik yeri terimi kullanılır. Çember ve doğru parçasını düzlemsel geometrik şekiller sayacağız.

!

- ❖ Temel kavramlar: nokta , doğru, düzlem ve uzaklıktır.
- ❖ Düzleme ait her noktaların geometrik yerine düzlemsel geometrik şekli, yada sadece **şekil** denir.
- ❖ **Türetilmiş** kavramlar: Temel kavramlar ve türetilmiş kavramları kullanarak tanımlanan kavramlardır.

Genel olarak, noktaların her geometrik yerine **geometrik şekil** denir.

1 Şu türetilmiş kavramların tanımını yazınız: yarı doğru, yarı düzlem ve açı.

1.2. Temel ve türetilmiş iddialar

Geometrik şekillerin özellikleri ve aralarındaki durumlar iddialarla ifade edilir. Geometride iki çeşit iddia fark ediyoruz: **temel** ve **türetilmiş** iddialar.

Aksiyomlar diye adlandırılan **temel iddialar,** ispatsız kabul edilen **iddialardır.** Aksiyomları genellikle $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ile işaret ediyoruz.

Geometrinin yapısında kullanılan aksiyomlar, Euklit geometrisinin aksiyomlarıdır. Bunlar:

!

Aksiyom 1. Her doğru üzerinde sonsuz çok nokta vardır, fakat aynı doğruya ait olmayan noktalar da vardır.

Aksiyom 2 Her doğru iki farklı nokta ile tamamen bellidir.

İki nokta A ve B için şunu diyebiliriz: farklı noktalar (yazılışı $A \neq B$) ya da çakışık noktalar (yazılışı $A \equiv B$, bu ise demektir ki, aynı nokta iki farklı şekilde işaretlenmiştir).

Nokta ve doğru kavramlarından başka, düzlem geometrisinde, yukarıda da adı geçen uzaklık kavramı da kullanılır. İki nokta A ve B arasındaki uzaklık $\overline{AB}$ ile işaret edilir. Bu temel kavram için şu aksiyomların doğru olduğu kabul edilmiştir.

!

Aksiyom 3: A noktasından B noktasına uzaklık pozitif reel sayı ya da sıfırdır, yani $\overline{AB} \geq 0$ $A \neq B$ ise, $\overline{AB} > 0$ dır. $A \equiv B$ ise, $\overline{AB} = 0$ dır.

Aksiyom 4: Herhangi iki nokta A ve B için A' dan B' ye uzaklık, B' den A' ya olan uzaklığa eşittir, yani $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Aksiyom 5: Herhangi üç nokta A, B ve C için, $\overline{AC}$ uzaklığı, $\overline{AB}$ ve $\overline{BC}$ uzaklıkların toplamından küçük ya da eşittir, yani $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$ dir.

2 Aksiyom 5' e uygun olarak $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ ve $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ bağıntılarını gösteren çizimler yapınız.

Uzaklık kavramı, "arasındadır" kavramının tanımlanmasına olanak sağlamaktadır.

!

- Üç farklı nokta A, B ve C için $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ eşitliği sağlanıyorsa , C noktasına A ve B noktaları arasındadır denir.

Şunlar da doğrudur:

!

- Aynı doğru üzerinde bulunan noktalara doğrudaş noktalar denir.
- Aynı düzlem üzerinde bulunan noktalara düzlemsel noktalar denir.

"Arasındadır" kavramı için şu aksiyom doğrudur:

!

Aksiyom 6: Bir nokta diğer iki nokta arsında ise, o üç nokta doğrudaştır. A, B ve C noktaları üç farklı doğrudaş nokta ise, ya A noktası B ve C noktaları arasındadır, ya B noktası A ve C noktaları arasındadır, ya da C noktası A ve B noktaları arasındadır .

Not: Euklit aksiyomlarını ilerdeki ders birimlerinde de kullanacağız.

Teorem denilen **türetilmiş kavramlar**, aksiyomları ya da (önceden ispatlanmış olan) türetilmiş iddiaları kullanarak ispatlanması gereken kavramlardır. Teoremleri genellikle T_1,T_2,T_3,ile işaret ediyoruz.

- ❖ **Aksiyomlar**, ispatsız kabul edilen temel iddialardır.
- ❖ **Teorem,** aksiyomları ya da (önceden ispatlanmış olan) türetilmiş iddiaları kullanarak doğruluğu ispatlanmış türetilmiş iddialardır.

Örnek 2. Bir teorem örneği.

Teorem: Her dikdörtgenin köşegenleri birbirine eşittir.

Teoremlerin doğruluğu ispatlanır. Her teorem $p \Rightarrow q$ gerektirimi biçiminde yazılabilir, yani şartlı biçimde olarak, p hipotez, q ise sonuçtur. Hipotezde ispatta kullanılacak koşullar veriliyor, sonuçta ise ispatlanması gereken veriliyor.

Örnek 3. Örnek 2' deki teoremin koşullu şekli şu şekilde ifade edilir:

Teorem: Bir dörtgen dikdörtgen ise, onun köşegenleri birbirine eşittir.

Hipotez p: dörtgen dikdörtgendir.

Sonuç q : Onun köşegenleri birbirine eşittir.

Koşullu biçimde verilen teorem ($p \Rightarrow q$), ters şekilde de yazılabilir ve onun ters iddiası ($q \Rightarrow p$) daima teorem olmayabilir. Ters iddia teorem olduğu durumda, ona verilenin ters teoremi denir. $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ teoremler olduğu durumda, onları beraber denklik gibi $p \Leftrightarrow q$ şeklinde yazabiliriz.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Hangi mantık kanunu kullanılmıştır?

$p \Rightarrow q$ veya $q \Rightarrow p$ iddialarından biri doğru değilse, $p \Leftrightarrow q$ şeklinde teorem elde edemiyoruz.

Uyarı: Teorem $p \Leftrightarrow q$ denklik biçiminde yazıldığında, onu iki yönden ispatlamamız gerekir, yani önce $p \Rightarrow q$ ispatlanır, ondan sonra da $q \Rightarrow p$ ispatlanır.

Örnek 4. **a) Teorem:** Bir sayı 15 ile bölünürse o sayı 3 ve 5 ile bölünür.

Teorem $p \Rightarrow q$ biçiminde verilmiştir ve biz bunun ters iddiasını $q \Rightarrow p$ ifade edebiliriz.

“Bir sayı 3 ve 5 ile bölünürse, o sayı 15 ile bölünür”

Ters iddia doğrudur (kendisi de teoremdir) ve verilen teoremin ters teoremidir.

Bu yüzden bu iki teoremi denklik gibi yazılabiliriz:

Teorem: Bir sayı 15 ile bölünür, ancak ve ancak o sayı 3 ve 5 ile bölünür ise.

b) $p \Rightarrow q$ biçiminde verilmiş olan ilerdeki teoreme ters iddia oluşturabiliriz:

Teorem: İki sayı çift ise, onların toplamı da çift sayıdır; bu iddianın tersi $q \Rightarrow p$ şu şekilde ifade edilir: “ İki sayının toplamı çift ise, o sayılar çifttir”.

İddianın tersi doğru değildir ve o yüzden teorem değildir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Niçin?

3 Seçtiğiniz birkaç teoremi ifade ediniz.

4 Üçgen ikizkenar ise onun iki eşit açısı vardır” teoremine ters olan iddiayı ifade ediniz. Bu iddia teorem midir? Cevap evet ise, onları denklik olarak ifade ediniz.

Koşullu şekilde ifade edilen teoremlerden başka, teoremler kategorik biçimde ifade ediliyorlar. Örnek 1 deki teorem bu şekilde ifade edilmiştir.

Bir teorem koşullu şekilden kategorik şekle dönüşebilir ve tersine.

5 Koşullu şekilde ifade edilmiş bir teoremi hatırlayınız ve onu kategorik şekilde ifade ediniz.

6 Kategorik şekilde ifade edilmiş bir teoremi hatırlayınız ve onu koşullu şekilde ifade ediniz. Teoremin hipotezini ve sonucunu belirtiniz.

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Temel kavramları sayınız.
2. Doğru parçası türetilmiş kavramını tanımlayınız. Tanımda hangi kavramlar kullanılmıştır?
3. Bazı aksiyomları ifade ediniz.
4. Verilen teoremlerde hangisi hipotez, hangisi ise sonuçtur:

   a) Bir sayı 6 ile bölünürse, o sayı 2 ve 3 ile bölünür;

   b) Bir yamuk ikizkenar ise, onun köşegenleri birbirine eşittir;

   c) Dikdörtgenin köşegenleri birbirine eşittir.

5. Alıştırma 4' teki teoremlerin ters iddialarını ifade ediniz. Bunlar teorem midir? Cevap evet ise, teoremi ve onun ters teoremini denklik kullanarak yazınız.

6. Şu teorem hangi şekildedir:

a) Bir sayı 5 ile bölünürse, onun son rakamı 5 ya da sıfırdır.

b) Her kirişler dörtgeninde, karşıt açıları bütünler açılardır.

7. Koşullu şekilde şu teorem verilmiştir: Bir sayı 2 ve 5 ile bölünüyorsa, o sayı 10 ile bölünür. Teoremin hipotezini ve sonucunu belirtiniz. Bu teoremi kategorik biçimde ifade ediniz.

8. Kategorik şekilde şu teorem verilmiştir: Her kirişler dörtgeninde karşıt açılar bütünlerdir. Bu teoremi koşullu şekilde ifade ediniz ve onun hipotezini ve sonucunu belirtiniz.

2. Nokta ve Doğru Arasındaki Durumlar. Düzlemde İki Doğru Arasındaki Durumlar

2.1. Nokta ve Doğru Arasındaki Durumlar

○ Bir a doğrusunu, ona ait bir A noktasını ve ona ait olmayan bir B noktasını işaret ediniz!

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ a doğrusu üzerinde kaç nokta vardır?

Her doğru bir noktalar kümesidir.

Her doğru düzlemi iki kısma ayırır. Doğru ile beraber her kısım birer yarı düzlemdir, doğruya da düzlemin sınır doğrusu denir.

Nokta çizgiye ait olabilir (yalan olabilir) veya çizgiye ait olmayabilir (yalan olmayabilir);

Bir A noktası a doğrusuna aittir ifadesi sembolik şekilde - $A \in a$ biçiminde yazılır, A noktası a doğrusuna ait değilse - $A \notin a$ biçiminde yazılır;

En az üç nokta aynı doğruya ait ise, onlara doğrudaş (doğrusal) noktalar denir. En az üç nokta bir doğruya ait değilse, onlara doğrudaş olmayan noktalar denir.

- ○ Beş doğrudaş nokta çiziniz!
- ○ Beş doğrudaş olmayan nokta çiziniz!

Nokta ve doğruya ait durumlar için, önceki bölümde Euklit geometrisinin aksiyomları gibi anılmış olan şu aksiyomlar verilecektir:

A_1: Her doğruya ait sonsuz çok noktalar vardır, aynı doğruya ait olmayan noktalar da vardır.

Şekil 1 de bir a doğrusu ve A, B ve C gibi üç nokta verilmiştir. A ve B noktaları a doğrusuna aittir, C noktası ise a doğrusuna ait değildir, yani $C \notin A$ dir. A ve B noktalarından başka a doğrusu üzerinde sonsuz çok noktalar vardır. Açıktır ki, C noktasından başka a doğrusuna ait olmayan noktalar vardır.

Şekil 1

A_2: Her doğru iki nokta ile tamamen bellidir.

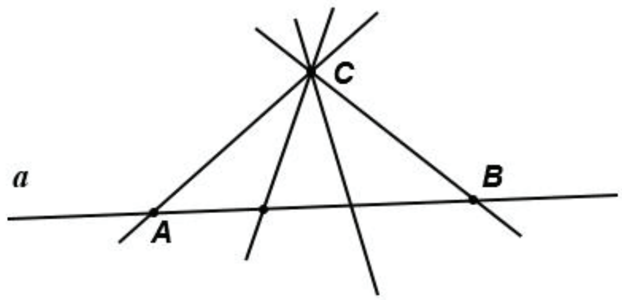
Bunu yukardaki şekilde görüyoruz, a doğrusu A ve B noktalarıyla tamamen bellidir.

a doğrusunu daha da AB ile ya da BA ile işaret edebiliriz.

Şu teoremi ispatlayacağız:

Teorem 1: Bir noktadan sonsuz çok doğrular geçer.

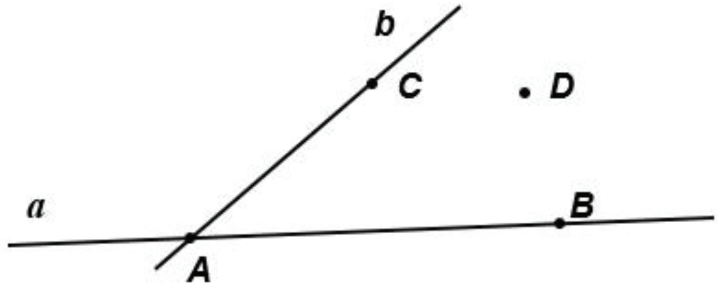
İspat: a doğrusu verilmiş olsun. Bu doğru A_2 aksiyomu gereğince iki noktayla A ve B ile tamamen bellidir Şekil 2. A_1 aksiyomu gereğince a doğrusuna ait olmayan bir C noktası vardır, dolayısıyla A ve B noktaları hariç a doğrusuna ait olmayan sonsuz çok noktalar vardır. Şimdi yeniden A_2 aksiyomunu uyguluyorsak, a doğrusuna ait her noktadan ve C noktasından geçen birer doğru çizebiliriz. Bu şekilde C noktasından geçen sonsuz çok doğrular olduğunu elde ediyoruz.



Şekil 2

1 İlerdeki şekil 3'e bakarak şu önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

а) $A \in a \wedge B \in a$ б) $A \in a \vee B \notin b$ в) $C \notin a \Leftrightarrow C \notin b$ г) $D \in a \Rightarrow D \notin b$.



Şekil 3

2 Üç nokta A, B ve C' den geçen kaç doğru çizilebilir? Cevabınızı açıklayınız!

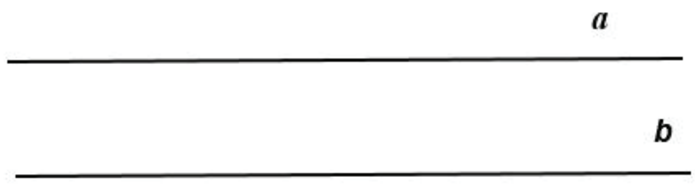
3 Üç doğru kaç noktada kesişebilir? Cevabınızı açıklayınız!

2.2. Düzlemde İki Doğru Arasındaki Durumlar

- Bir düzlem çiziniz ve işaretleyiniz! Düzlemde iki doğru çiziniz. Bu doğrular arasındaki durumlar nasıl olabilir?

Bir düzlem üzerinde bulunan iki doğru arasında şu durumların var olduğunu her halde görmüşsünüz:

❖ a ve b doğrularının ortak noktaları yoktur $(a \cap b = \varnothing)$, yani onlar **paraleldirler** şek.4.



Şekil 4

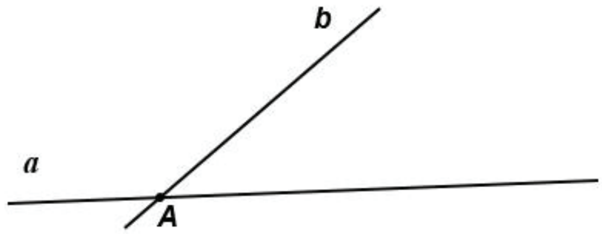
$a \parallel b$ biçiminde işaret edilir ve "a doğrusu b doğrusuyla paraleldir" diye okunur.

Bununla ilgili Euklit aksiyomunu da ifade edelim:

> **Aksiyom 7.** Verilen bir *a* doğrusuna ait olmayan bir noktadan *a* doğrusuna paralel olan bir tek *b* doğrusu geçer

4 Aksiyom 7 ile ilgili bir çizim yapınız!

❖ a ve b doğrularının bir ortak noktası vardır $(a \cap b = \{A\})$ yani onlar şekil 5'te olduğu gibi **kesişiyorlar**.



Şekil 5

❖ a ve b doğrularının **sonsuz çok ortak noktaları vardır**, yani onlar şekil 6'da olduğu gibi doğrular çakışıktır.

Şekil 6

$a \equiv b$ biçiminde işaret edilir ve "a doğrusu b doğrusuyla çakışıktır" diye okunur.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ İki ortak noktası olan iki doğrunun aralarındaki durum nasıldır?

Bu sorunun cevabını şu teorem vermektedir:

Teorem 3: İki ortak noktası olan iki doğru çakışıktır.

İspat: A_2 aksiyomuna uyguluyoruz: her doğru iki farklı nokta ile tamamen bellidir iddiası doğru olduğuna göre, iki doğrunun iki ortak noktası varsa, açıktır ki o doğruların tüm noktaları ortaktır, dolayısıyla doğrular çakışıktır, yani bir doğrunun tüm noktaları diğer doğruya aittir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ İki farklı doğrunun en çok kaç ortak noktası olabilir?

Yukarıdakilerden anlaşıldığı gibi: İki farklı doğrunun en çok bir ortak noktası olabilir.

Şu iddianın doğruluğu da açıktır:

!

❖ Bir düzleme ait iki doğru ya paralel, ya kesişen ya da çakışık olabilir.

5 Bir a doğrusu ve bir nokta $A \notin a$ çiziniz. A noktasından geçen ve a doğrusuna paralel olacak kaç doğru çizilebilir? Çizim yapınız!

6 Bir a doğrusunu çiziniz. a doğrusuna paralel olan kaç doğru çizilebilir?

Çizim yapınız!

7 Bir a doğrusunu ve bir $A \notin a$ noktasını çiziniz. A noktasından geçen ve a doğrusunu kesen kaç doğru çizilebilir. Çizim yapınız!

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Aynı noktadan geçmeyen en az üç doğrunun olduğunu ispatlayınız.
2. Her noktaya kendisinden geçen doğrular vardır!
   Her noktaya kendisinden geçmeyen doğrular vardır!
   Bu iddialar doğru mudur?
3. Beş farklı noktadan kaç doğru geçer? Cevabı açıklayınız ve çizim yapınız!
4. İki doğru kaç noktada kesişebilir? Cevabı açıklayınız ve çizim yapınız!
5. Doğrudaş olmayan 4 nokta kaç düzlem belirtiyorlar? Cevabı açıklayınız ve çizim yapınız!

3. Düzlemde Geometrik Şekiller: Yarı Doğru (Işın) ve Açı

3.1. Işın (Yarı Doğru)

Bir a doğrusunu çiziniz ve üzerinde bir O noktasını işaret ediniz.

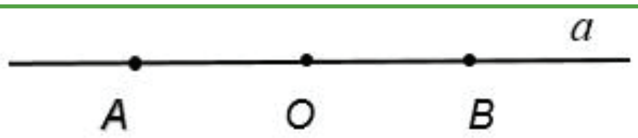
Düşününüz ve cevaplayınız:

○ O noktası doğruyu kaç kısma ayırmaktadır?

Şekil 9' da görüldüğü gibi, O noktası a doğrusunu iki kısma ayırır. O noktasının farklı taraflarında olmak üzere iki nokta A ve B işaret edilmiştir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ a doğrusunun kısımları nasıl adlandırılır, yani OA ve OB nedir?



Şekil 9

Genel olarak ışın (yarı doğru), bir nokta, yani başlangıç noktası ile sınırlanan doğrunun bir kısmı olarak algılanır.

❖ a doğrusunun belirlenen bir O noktası ile bu noktanın herhangi bir yanında kalan noktalar kümesine **ışın** denir.

❖ O noktasının iki tarafında bulunan iki yarı doğru, a doğrusunu **tamamlayan yarı doğrular**dır.

OA ışını için şu Euklit aksiyomu geçerlidir:

Aksiyom 8. Her OA ışın üzerinde, başlangıç noktasından verilen bir r uzaklığında bulunan bir tek nokta B vardır.

1 Aksiyom 8 ile ilgili şekil yapınız!

2 Bir doğru çiziniz ve üzerinde üç nokta işaret ediniz. Bu üç nokta ile kaç ışın belirtilir?

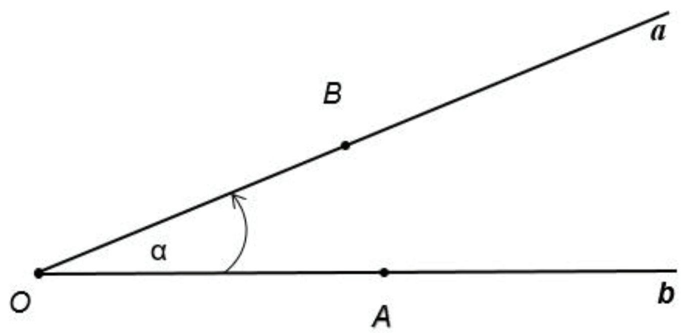
3 Doğrudaş olmayan üç nokta işaret ediniz ve her iki noktadan geçen doğrular çiziniz. Bu doğrular kaç ışın belirtir?

3.2. Açı

Başlangıç noktaları ortak O noktasında olan iki ışın a ve b çiziniz.

Düşününüz ve cevaplayınız:

- Her ışına birer nokta A ve B işaret ediniz. Hangi geometrik şekli elde edilir? Açıyı adlandırınız.
- OA ve OB ışınlarına ne denir? O noktasına ne denir?



Şekil 10

Açıyı $\sphericalangle AOB$ yada α ile işaret ediyoruz, şekil 10.

!

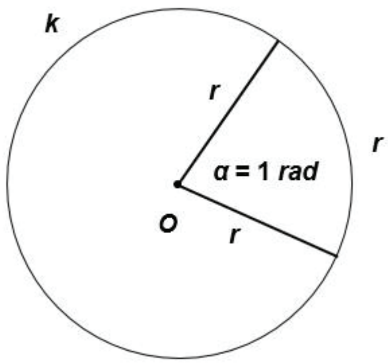
- Ortak başlangıcı olan iki ışından ve bu ışınların ayırdıkları düzlem kısmından oluşan şekle açı denir;
- Bu ışınlardan oluşan açılardan birinin ayırdığı düzlemin kısmına **açının bölgesi** denir ve çember yayı ile işaret edilir. OA ve OB ışınlarına açının kenarları, O noktasına ise açının köşesi denir.

Pratikte, açılar derecelerle ölçülür, fakat açıların ölçülmesinde radyan denilen ölçü birimi de vardır.

!

- Açıların ölçülmesi için temel ölçü birimi açı derecesidir, yani $1°$ “ bir derece” diye okunur. Bir açı derecesi ($1°$) dik açının $\frac{1}{90}$ ‘ine eşit olan açının ölçüsüdür. Bundan küçük ölçüler dakikalar ve saniyelerdir, yani 1’ (bir dakika diye okunur) ve 1” (bir saniye diye okunur) ve onlar arasında $1° = 60'$ ve $1' = 60''$ bağıntısı geçerlidir;

- **Bir radyan** (1 rad) herhangi bir çemberde, yayı yarıçapına eşit olan bir merkez açının ölçüsüdür (şekil 11).



Şekil 11

- Şekil 11 de çizilmiş olan α açısına merkez açı denir.

!

- Köşesi bir çemberin merkezinde olan açıya merkez açı denir..

Genel olarak, merkez açının ölçüsü α radyanı ise, yayın uzunluğu $l = \alpha \cdot r$ formülüyle hesaplanır. Merkez açı 360 derece olduğu durumda, ona karşılık

yayın uzunluğu $l = 2\pi \cdot r$ dir. Açının radyan cinsinden ölçüsü $\alpha = \frac{l}{r} = 2\pi\, rad$ .. elde edilir. Buradan da

$$360^0 = 2\pi\, rad,\ 180^0 = \pi\, rad\,.$$

elde edilir. Derece ve radyan arasındaki bağıntı şu formülle verilmiştir:

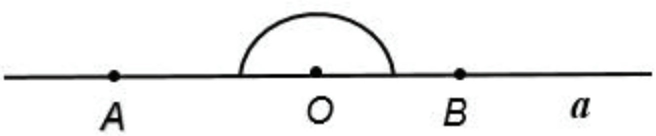
$$\beta = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{180^0}{\pi} \cdot \beta .$$

burada α açının derece ölçüsü, β ise açının radyan ölçüsüdür.

Birbirinin uzantısı olan iki yarı doğru çiziniz.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Bu, hangi açıdır? Ölçüsü kaç derecedir?



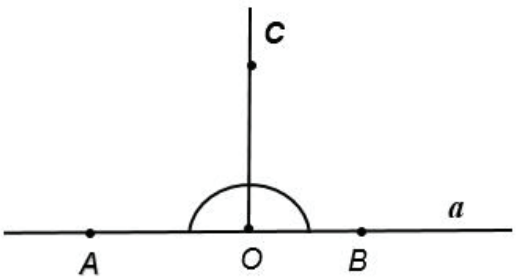
Şekil 12

$\measuredangle AOB = 180^0$ dir , şekil 12.

❖ Kenarları birbirini tamamlayan iki yarı doğru olan açıya **doğru açı denir**. Doğru açının ölçüsü 180° dir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Doğru açının yarısı olan açıya nasıl denir? Ölçüsü kaç derecedir?



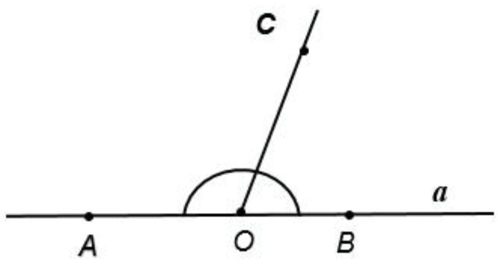
Şekil 14

$\measuredangle AOC = \measuredangle BOC = 90^0$ dir, şekil 14.

- ❖ Doğru açının yarısı olan açıya dik **açı** denir. Dik açının ölçüsü 90° dir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

- ○ Dik açıdan küçük olan açıya ne denir? Dik açıdan büyük olan açıya ne denir? Bu açıları şekil 15'te adlandırınız.
- ○ Doğru açıdan büyük olan açıya ne denir? doğru açıdan küçük olana ne denir?



Şekil 15

- ❖ Dik açıdan küçük olan açıya dar açı denir, dik açıdan büyük olan açıya **geniş açı denir.**
- ❖ Geniş açıdan **büyük olan açıya** konveks olmayan açı, geniş açıdan küçük olan açıya **konveks açı denir**.

Bir ortak kenarı ve ortak olmayan iç bölgeleri olan iki açı çiziniz.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Bu açılara ne denir? Şekil 15

Bir ortak kenarı ve ortak olmayan iç bölgeleri olan iki açıya komşu **açılar denir.**

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Doğru açıyı oluşturan komşu açılara ne denir? Şekil 15!

❖ Doğru açıyı oluşturan komşu açılara komşu **bütünler açılar** denir. Onların toplamı 180° dir.

Dik açı çok kez şu şekilde de tanımlanır:

❖ Komşu bütünler açısına eşit olan açıya dik açı denir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Toplamı dik açı (90°) olan iki açıya ne denir?

○ Toplamı doğru açı (180°) olan iki açıya ne denir?

❖ Toplamı 90° olan iki açıya tümler **açılar** denir.

❖ Toplamı 180° olan iki açıya bütünler **açılar** denir. *.*

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Her bütünler açılar, aynı zamanda komşu bütünler açılar mıdır?

4 İki açının toplamı 125°15’ dır. Bunlardan biri 78°27’ olduğuna göre diğer açı ne kadardır?

5 Verilen 127°26’36” açının tümleyenini ve bütünleyenini belirtiniz.

6 Bir doğru açı çiziniz. Onun köşesinden düzlemin bir tarafındaki bölgede, başlangıcı doğru açının köşesinde olmak üzere 2 ışın çizilmiştir. Bu şekilde kaç çift komşu açı elde dilmiştir? Onlardan hangileri komşu bütünler açılardır?

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Kesişen iki doğru çiziniz. Başlangıç noktaları kesişim noktasında olmak üzere kaç ışın belirlenmiştir? Onları adlandırınız! Onlardan hangileri birbirini tamamlar (bir doğruyu oluşturuyorlar)?
2. Paralel olan iki doğru ve onları kesen üçüncü bir doğruyu çiziniz. Başlangıçları kesişim noktalarında olmak üzere kaç ışın belirlenmiştir? Onları adlandırınız! Onlardan hangileri birbirini tamamlar (bir doğruyu oluşturuyorlar)?
3. İki açı α = 112°2’ ve β = 28°15’13” verilmiş olsun.
   $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = \alpha - \beta$ hesaplansın. Ondan sonra onların bütünleyenleri de hesaplansın.
4. Ölçüsü 78°15’13” olan açı verilmiş olsun. Onun tümleyen ve bütünleyen açısını bulunuz.

5. İki açı $\alpha = 12°2'$ ve $\beta = 21°30'3''$ verilmiş olsun. $\gamma = 8\alpha - 2\beta$ açısını hesaplayınız.

6. $\alpha - \gamma = 90°$, $\beta + \gamma = 90°$ olmak üzere üç açı α, β, γ açıları verilmiştir. α ve β açılarının birbirine göre durumu nasıldır?

7. Paralel olan iki doğru ve onları kesen üçüncü bir doğru çiziniz. BU şekilde elde edilen tüm açıları işaretleyiniz. Onlardan hangileri komşu açılar, hangileri ise komşu bütünler açılardır?

4. Düzlemde Geometrik Şekiller: Doğru Parçası ve Çokgen

4.1. Doğru Parçası

Bir doğru ve üzerinde iki farklı nokta işaretleyiniz.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ Nasıl geometrik şekilleri elde edildi? Bunlardan kaçı doğru parçasıdır?

Doğru parçasının şu tanımını biliyoruz: Bir doğru üzerinde işaretlenen iki nokta ve onlar arasında bulunan tüm noktaların kümesidir. Halbuki doğru parçasını şu şekilde de tanımlayabiliriz:

❖ İki farklı noktadan ve onlar arasında bulunan tüm noktalardan oluşan düzlemsel geometrik şekline **doğru parçası** denir.

○ Bir AB doğru parçasını çiziniz.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ BA aynı doğru parçası mıdır? A ve B noktalarına ne denir? $\overline{AB}$ nedir?

Şekil 16

Doğal olarak A ve B noktaları doğru parçasının uç noktalarıdır, $\overline{AB}$ ise A ve B noktaları arasındaki uzaklıktır ve onun uzunluğudur (doğru parçasının ölçüsüdür). Daha da BA ve $\overline{AB}$ aynı doğru parçası olduğunu biliyoruz.

❖ Uzunlukları aynı olan doğru parçalarına eşit ya da denk doğru parçalar denir.

İki doğru parçası a ve b, kendi uzunluklarıyla karşılaştırılabilir ve şu üç durumdan biri mümkündür: ya $a > b$ ya $a < b$ ya da $a = b$ olabilir.

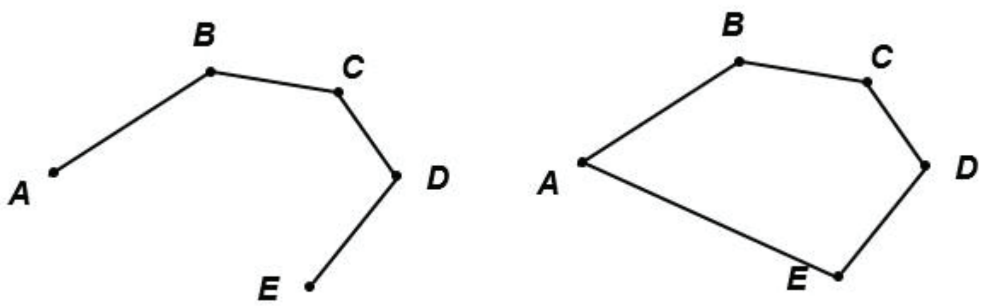
Aksiyom 8, önemli aksiyomdur, çünkü bu aksiyom bir doğru parçasının çizimini ve doğru parçalarıyla grafiksel şekilde sadece pergel ve cetvel kullanarak işlemlerin yapılmasını sağlamaktadır.

1 Dört doğrudaş nokta seçiniz. Bunlar kaç doğru parçası belirtiyorlar? Onları adlandırınız!

2 Doğrudaş olmayan üç nokta seçiniz. Bunlar kaç doğru parçası belirtiyorlar? Onları adlandırınız!

4.2. Çokgenhi

Şekil 17 verilmiş olsun:



Şekil 17

Düşününüz ve cevaplayınız:

- Şekilde çizilenler neler ile yapılmıştır?

AB ve BC doğru parçalarının B noktası ortaktır ve onlara komşu doğru parçaları denilir.

❖ Herhangi iki komşu doğru parçası bir doğru üzerinde olmamak koşuluyla ikişer ikişer uç uca eklenmesiyle oluşan geometrik şekline kırık çizgi denir. Doğru parçaların uç noktalarına kırık çizginin köşeleri denir. Kırık çizgiyi oluşturan doğru parçalara kırık çizginin kenarları denir.

❖ Kırık çizginin aynı kenarına ait olan köşelere komşu köşeler denir. Ortak köşesi olan kenarlar, kırık çizginin komşu kenarlarıdır.

❖ Kırık çizgi açık ya da kapalı kırık çizgi olabilir.

Şekil 17 ye bakınız ve şu soruları cevaplayınız::

- A noktası kırık çizginin nesidir? AB doğru parçası kırık çizginin nesidir?
- Hangi kırık çizgi açık, hangi kırık çizgi ise kapalıdır?
- Birinci kırık çizgide C köşesine hangi köşeler komşu köşelerdir, ikinci kırık çizgide de C köşesine hangileri komşu köşelerdir?
- Birinci kırık çizgide BC kenarına hangi kenarlar komşu kenarlardır, ikinci kırık çizgide ise hangileridir?

❖ Komşu olmayan kenarları kesişmeyen kırık çizgiye **poligon çizgisi** denir.

❖ Kırık çizginin kenarlarının uzunluklarının toplamına **kırık çizginin çevresi** denir.

Örnek 1. Açık kırık çizginin çevresi $P = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}$, dir, kapalı kırık çizginin çevresi ise $P = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}$ dir.

Örnek 2. Önceki şekilde $ABCDE$ poligonal çizgisi kapalı kırık çizgidir.

❖ Kırık çizgi, düzlemi iç ve dış bölge olmak üzere iki bölgeye ayırır. Kırık çizgi ile sınırlanan bölgeye iç bölge denir, diğer bölgeye ise dış bölge denir.

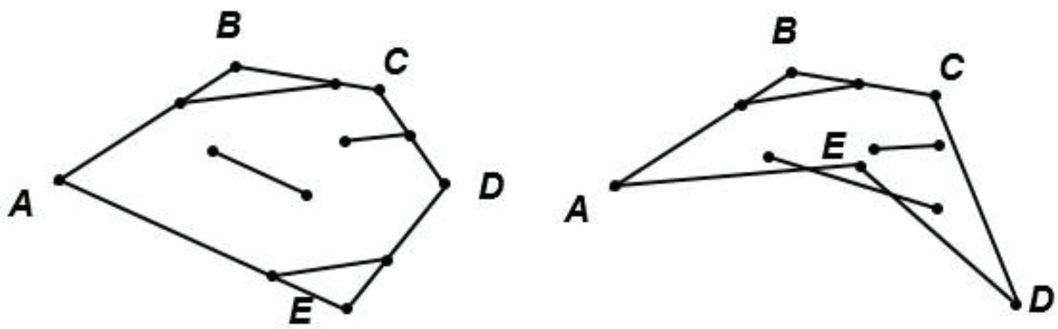
❖ Bir kırık çizgi ve onun iç bölgesinden oluşan şekle **çokgen** denir.

Örnek 3. Şekil 17 de $ABCD$ çokgendir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

- ABCDE çokgeninin kaç kenarı, köşesi, iç ve dış açısı vardır?
- Üçgenin kaç kenarı, köşesi, iç ve dış açısı vardır, dörtgenin ise kaç tane?

Şekil 18 deki çokgenleri inceleyelim:



Şekil 18

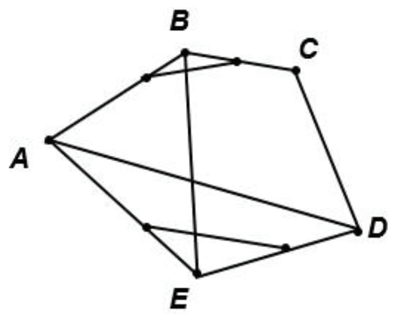
Görüldüğü gibi $ABCDE$ birinci çokgende, uç noktaları çokgen içinde ya da kenarlarında olan herhangi doğru parçasının tüm noktaları çokgenin iç bölgesine aittir. Bu gibi çokgenler **konveks çokgenlerdir**. İkinci çokgen $ABCDE$'de ise uç noktaları çokgenin iç bölgesine ait olduğuna rağmen, doğru parçasının tüm noktaları çokgenin iç bölgesine ait değildir, yani burada uç noktaları çokgenin iç bölgesinde olan her doğru parçasının tüm noktaları çokgenin iç bölgesine ait olmayabilir. İkinci çokgene **konveks olmayan çokgen** denir.

❖ Bir çokgende, herhangi bir doğru parçasının uç noktaları çokgen içinde ya da kenarları üzerinde olarak doğru parçasının tüm noktaları çokgenin iç bölgesine ait ise, **çokgen konvekstir.** Diğer taraftan uç noktaları çokgenin iç bölgesine ait olduğuna rağmen, doğru parçasının tüm noktaları çokgenin iç bölgesine ait olmayabilir. Böyle durumda olan çokgenlere **konveks olmayan çokgenler** denir.

Not: Konveks çokgenlerde, herhangi bir kenarın ait olduğu bir doğru çizildiğinde, çokgenin tümü bu doğru ile sınırlanan yarı düzlemlerden birine ait olacaktır. Konveks olmayan çokgenlerde ise bu özellik yoktur.

3 Üç konveks çokgen ve iki konveks olmayan çokgen çiziniz!

Şekil 19'da çizilmiş olan çokgen verilmiş olsun:



Şekil 19

Düşününüz ve cevaplayınız:

- Resimdeki tüm bölümleri adlandırın!
- Bunlardan hangileri $ABCDE$ çokgenin köşegenleridir?
- A köşesinden çizilebilen köşegenleri sayınız!
- Verilen çokgenin her köşesinden çizilebilen tüm köşegenleri sayınız!

!

- Uç noktaları çokgenin komşu olmayan köşelerinde olan doğru parçasına **çokgenin köşegeni** denir.

- Çokgenin bir köşesinden çizilebilen **köşegen sayısı** $d=n-3$ formülüyle hesaplanır; burada n çokgenin kenarlarının sayısıdır.

- n kenarlı bir çokgende çizilebilen tüm köşegenlerin sayısı $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ formülüyle hesaplanır.

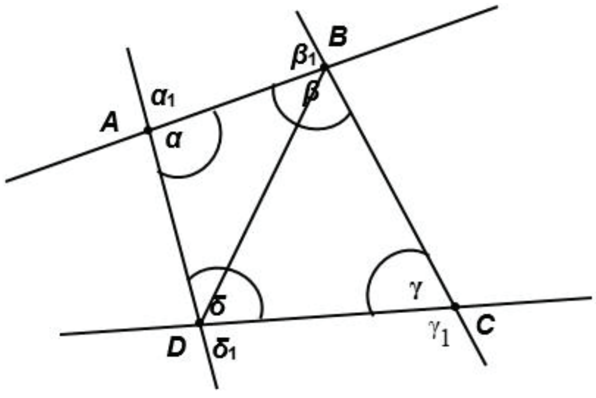
4 Beşgenin bir köşesinden çizilebilen köşegenlerin sayısını ve beşgenin tüm köşegenlerinin sayısını hesaplayınız.

5 Üçgenin bir köşesinden kaç köşegen çizilebilir ve üçgenin toplam kaç köşegeni vardır?

6 Bir çokgenin bir köşesinden 10 köşegen çizilebilir. Hangi çokgen söz konusudur?

7 Bir çokgende toplam 9 köşegen çizilebilir. Hangi çokgen söz konusudur?

Aşağıdaki şekil 20'de bir çokgen verilsin:



Şekil 20

$ABCD$ çokgeni dörtgendir ve onun 4 köşesi, 4 kenarı, 4 iç açısı ve 4 dış açısı vardır. Dörtgenin iç açıları toplamı 360° olduğunu biliyoruz. Bunu nereden biliyoruz? Bu dörtgenin bir köşegenini.

Bunu nasıl biliyoruz? Çizersek dörtgeni iki üçgene böleceğiz. Her üçgenin iç açılarının toplamı 180° olduğundan dörtgenin iç açılarının toplamı 360° olacaktır.

Düşününüz ve cevaplayınız:

○ $ABCD$ dörtgeninin iç açılarını adlandırınız!

○ Dörtgenin dış açılarını adlandırınız!

Benzer şekilde herhangi bir çokgenin bir köşesinden köşegenler çizerek çokgeni üçgenlere ayırıyoruz. Bir köşeden çizilen köşegenlerle çokgen $n-2$ üçgene ayrılır. O halde n kenarlı bir çokgenin iç açılarının toplamı için, $S_n = 180^\circ(n-2)$ formülü elde edilir.

$ABCD$ dörtgeninin dış açılarının toplamı için

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=(180^0-\alpha)+(180^0-\beta)+(180^0-\gamma)+(180^0-\delta)$$
$$=4\cdot180^0-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=4\cdot180^0-360^0=360^0$$

elde edilir. n kenarlı herhangi çokgenin dış açılarının toplamı

$n\cdot180^0-S_n=n\cdot180^0-(n-2)\cdot180^0=2\cdot180^0=360^0$ dir.

!

❖ **Her çokgenin iç açıları toplamı** $S_n = 180^\circ(n-2)$ formülüyle hesaplanır;

❖ **Her çokgenin dış açılarının toplamı** 360° dir.

8 Yedigenin iç açılarının toplamını hesaplayınız.

8 Bir çokgenin iç açılarının toplamı 540° dir. Söz konusu hangi çokgendir?

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. Uç noktaları bir doğru üzerinde olan AB ve A_1B_1 doğru parçaları veriliyor. O noktası AB doğru parçasının orta noktası ve A_1B_1 doğru parçasının orta noktasıdır. $\overline{AA_1}=\overline{BB_1}$ olduğunu ispatlayınız.
2. Beş doğrudaş nokta kaç doğru parçası belirttiğini sayınız. Adlandırınız! Onların uzunluklarını karşılaştırınız. Onların uzunluklarının karşılaştırılmasıyla herhangi bir sonuç çıkarılabilir mi?

3. Doğrudaş olmayan üç nokta kaç doğru parçası belirttiğini sayınız. Adlandırınız! Hangi çokgen elde edilir? Onların uzunluklarını karşılaştırınız! Onların uzunluklarının karşılaştırılmasıyla herhangi bir sonuç çıkarılabilir mi?
4. On beş genin bir köşesinden kaç köşegen çizilebildiğini ve on beş genin tüm köşegenlerinin sayısını belirtiniz.
5. Bir çokgenin bir köşesinden 15 köşegen çizilebilir. Söz konusu hangi çokgendir?
6. Ongenin iç açılarının toplamını hesaplayınız.
7. Bir çokgenin iç açılarının toplamı 1080° dir. Söz konusu hangi çokgendir?

5. Düzlemde Geometrik Şekiller: çember ve Daire

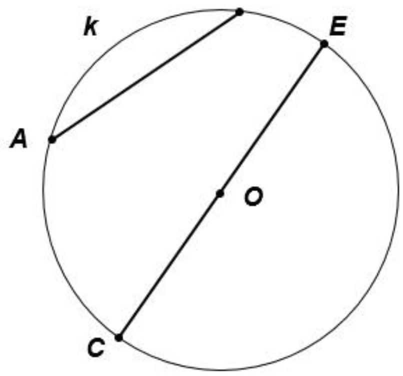
5.1. Çember ve Daire

Düzlem üzerinde sabit bir O noktasından düzlemde eşit uzaklıkta olan noktaların kümesine çember denir. O noktasına çemberin merkezi, O noktasından çemberin herhangi bir noktasına olan uzaklığa ise çemberin yarıçapı denir ve r ile işaret edilir. Çemberi $k(O, r)$ biçiminde işaretleyeceğiz.

Düzlem üzerinde sabit bir O noktasından düzlemde eşit ya da daha küçük uzaklıkta olan noktaların kümesine daire denir.

Uç noktaları çember üzerinde olan doğru parçasına kiriş denir. En büyük kiriş çemberin merkezinden geçer ve ona çemberin çapı denir. Çemberin çapı iki yarıçapa eşittir, yani $d = 2r$.

Şekil 21 de:



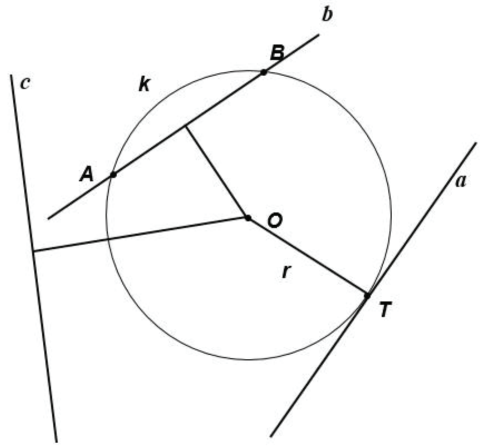
Şekil 21

AB ve CE kirişlerdir, fakat sadece CE çemberin çapıdır ve $\overline{CE} = 2r$ dir. Daha da $\overline{CO} = \overline{OE} = r$ dir.

1 Bir çemberde bir kirişin uzunluğu 12 cm dir ve bu kirişin merkez uzaklığı 8 cm dir.

Çemberin yarıçapı ne kadardır?

Şekil 22 veriliyor:



Şekil 22

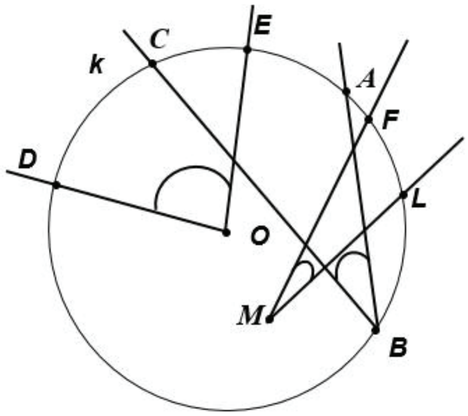
a doğrusunun çemberle bir ortak noktası vardır $(a \cap k = \{T\})$. Bu doğruya çemberin teğeti denir. Çemberin merkezinden teğete uzaklık çemberin r yarıçapına eşit olduğunu fark edebilirsiniz. b doğrusunun çemberle iki ortak noktası vardır $(b \cap k = \{A, B\})$. Bu doğruya çemberin keseni denir. Çemberin merkezinden b doğrusuna uzaklık r yarıçapından küçüktür. c doğrusunun ise çemberle hiçbir ortak noktası yoktur. Çemberin merkezinden c doğrusuna uzaklık çemberin yarıçapı r den daha büyüktür.

!

- Çemberin merkezinden herhangi doğruya olan uzaklığa doğrunun **merkez uzaklığı** denir.
- Çember ile sadece bir ortak noktası olan doğruya **çemberin teğeti** denir. Herhangi bir teğetin merkez uzaklığı çemberin yarı çapına eşittir.
- Çember ile iki ortak noktası olan doğruya **çemberin** keseni denir. Herhangi bir kesenin merkez uzaklığı çemberin yarı çapından küçüktür.
- Çember ile hiçbir ortak noktası olmayan herhangi doğrunun merkez uzaklığı çemberin yarı çapından büyüktür.

2 Bir $k(O,r)$ çemberini ve beş doğru çiziniz. Onlardan iki tanesi teğetler, iki tanesi kesenler ve bir tanesinin çemberle hiçbir ortak noktası olmasın. Çizilen her doğrunun merkez uzaklıklarını işaret ediniz.

Şekil 23 te $k(O,r)$ çemberi verilmiştir:



Şekil 23

Şekilde üç açı çizilmiştir $\sphericalangle BAC, \sphericalangle DOE, \sphericalangle LMF$.

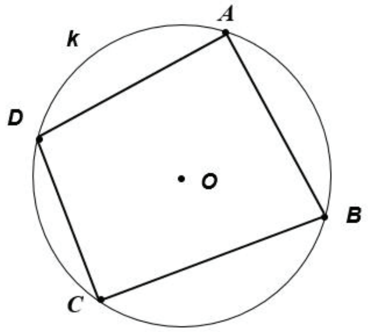
$\sphericalangle BAC$ açısının B köşesi çember üzerindedir, bu yüzden bu açıya çevre açı denir. $\sphericalangle DOE$ açısı merkez açıdır. $\sphericalangle LMF$ açısı ne merkez ne de çevre açıdır, çünkü onun M köşesi ne çemberin merkezinde ne de çember üzerinde değildir.

!

- ❖ Köşesi çember üzerinde olan ve kenarları çemberi kesen açıya **çevre açı** denir.
- ❖ Merkez açı ve çevre açı aynı yayı gördüğü durumda, merkez açı çevre açının iki katıdır.

3 α = 125°36’ merkez açı olsun. Buna karşılık gelen (aynı yayı gören) çevre açı β kaç derecedir?

İlerdeki şekil 24’ü inceleyelim:



Şekil 24

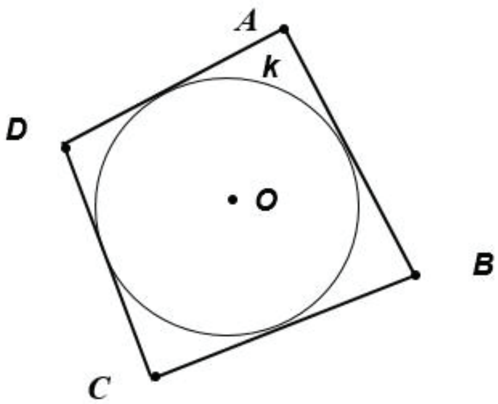
Köşeleri $k(O, r)$ çemberi üzerinde olmak üzere $ABCD$ dörtgeni çizilmiştir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

- $ABCD$ dörtgeninin kenarı k çemberinin nesidir?

❖ Kenarları bir çemberin kirişleri olan dörtgene kirişler dörtgeni denir.

Şekil 25'i inceleyelim.



Şekil 25

$k(O, r)$ çemberi $ABCD$ dörtgenine içten teğettir.

Düşününüz ve cevaplayınız:

- $ABCD$ dörtgeninin kenarlarının ait olduğu doğrular k çemberinin nesidir?

!

❖ Kenarları bir çemberin teğetleri olan dörtgene **teğetler dörtgeni** denir.

!

❖ Her kirişler dörtgeninde karşıt açılar bütünleyen açılardır.

❖ Her teğetler dörtgeninde karşıt kenarların toplamı eşittir.

4 Bir kirişler dörtgeninin iç açıları 1 : 2 : 3 : 4 oranındadır. Dörtgenin iç açılarını hesaplayınız !

5 Kare, bir teğetle dörtgeni midir? Cevabınızı açıklayınız!

Kendi başına çalışma alıştırmaları

1. İspatlayınız: AB ve A_1B_1 bir çemberin iki çapı ise $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$ ve $AA_1 \parallel BB_1$ dir!

2 Bir kirişin bir uç noktasında çembere çizilen teğet ile kiriş arasındaki açı, bu kirişe karşılık gelen çevre açıya eşittir. İspatlayınız!

3 Bir çemberde 24 cm uzunluğunda olan bir kirişin merkez uzaklığı 9 cm dir. Çemberin yarıçapı ne kadardır?

4. Aynı bir çember yayına karşılık gelen merkez ve çevre açının toplamı 136° 47’24” dir. Bunların her biri ne kadardır?

5. Bir ΔABC üçgeni etrafında, köşeler çember üzerinde olacak şekilde çember çiziliyor. $\sphericalangle ACB = 50^0$, $\sphericalangle ABC = 60^0$. dir. $\sphericalangle ABC$ açısının açıortayı çemberi D noktasında keser. $ABCD$ dörtgeninin açılarını hesaplayınız.

6. Eşkenar dörtgen, teğetler dörtgeni midir? Cevabı açıklayınız!

6. Modüler Birime Ait Tekrarlama Alıştırmaları

1. "Her kirişler dörtgeninde karşıt açılar bütünler açılardır" teoremini koşullu biçimde ifade ediniz ve bu şekilde ifade edilen teoremin hipotezini ve sonucunu belirtiniz.
2. 4 farklı noktadan kaç doğru çizilebilir? Tüm durumları çiziniz.
3. Üç açının toplamı 180° dir. Açıların ölçüsü 2:3:4 olduğuna göre, her birinin ölçüsü ne kadardır?
4. Bir çift komşu bütünler açının farkı $27^\circ 12'$ dır. Her birinin ölçüsü ne kadardır?
5. Bir çokgenin iç açıları toplamı 720° dir. Hangi çokgen söz konusudur?
6. Bir beşgenin iç açıları 2:3:4:5:6 oranındadır. Her birinin ölçüsü ne kadardır?
7. Bir çokgende toplam 35 köşegen çizilebilir. Hangi çokgen söz konusudur? Bu çokgenin bir köşesinden kaç köşegen çizilebilir?
8. Yarıçapı $10cm$ olan bir çemberde, bir kiriş 12 cm dir. Bu kirişe kadar merkez uzaklık ne kadardır?
9. Aynı bir yaya karşılık gelen merkez ve çevre açıların toplamı $144^\circ 54' 12''$ olsun.
10. Bir kirişler dörtgeninde aynı kenara ait iki açısı $65^\circ 25'$ ve $125^\circ 34'$ olsun. Dörtgenin diğer iki açısını hesaplayınız.

8

DÜZLEMSEL GEOMETRİK ŞEKİLLERİN ÇEVRESİ VE ALANI

MODÜLER BİRİMİN HEDEFLERİ

Bu modüler birimini incelemekle öğrenci şu kazanımları elde etmelidir:

- Paralelkenarın alanını hesaplamalıdır (dikdörtgen, kare, eşkenar dörtgen, çeşitkenar dörtgen);
- Üçgenin alanını ve çevresini hesaplamalıdır;
- Üçgenin çevrel ve içten teğet çemberinin yarıçapını hesaplamalıdır;
- Dik üçgende Pisagor teoremini, Euklit teoremini ve Tales teoremini uygulamalıdır;
- Yamuğun çevresini ve alanını hesaplamalıdır;
- Teğetler ve kirişler dörtgenini fark etmelidir;
- Teğetler ve kirişler dörtgeninin özelliklerinden yararlanmalıdır;
- Çokgenin çevresini ve alanını hesaplamalıdır;
- Dairenin ve daire parçalarının çevresini ve alanını hesaplamalıdır;
- Çevre ve alan formüllerini pratik problemlerde uygulamasını bilmelidir.

MODÜLER BİRİM 8’İN İÇİNDEKİLERİ

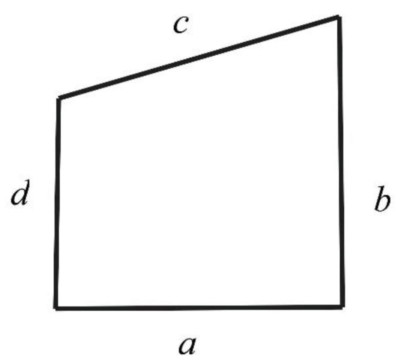
Önceki modüler biriminde, aralarında çokgen ve daire ile beraber bazı düzlemsel şekiller kavramlarını tanımladık. Bu modüler birimde üçgen ve dörtgen gibi bazı çokgenler hakkında bildiklerimizi, onların çevresini ve alanını hatırlayacağız, daha da dairenin ve parçalarının çevresini ve alanını hesaplayacağız. Reel hayatta, yani günlük yaşantımızda düzlemsel şekillerin çevresini ve alanını hesaplamaya daima ihtiyacımız olmuştur. Örnek, bir bahçeyi telle sarmak için kaç metre tele ihtiyaç olduğunu, verilen bir odanın döşemesi için (ne kadar parke ya da fayans) ya da duvarlarının sıvanması için ne kadar malzemenin gerektiğini hesaplamamız gerekebilir vb.

1. Çokgenin Çevresi. Kare ve Dikdörtgenin Çevresi ve Alanı

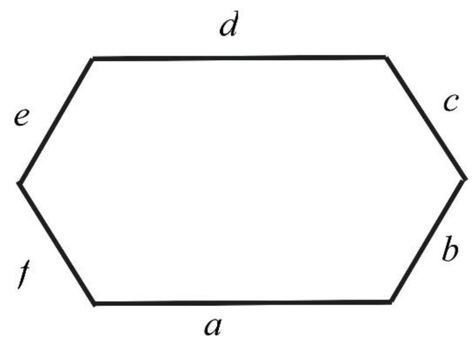
!

Bir çokgenin tüm kenarlarının uzunlukları toplamına **çokgenin çevresi** denir.

Çevre genellikle L harfi ile işaret edilir.



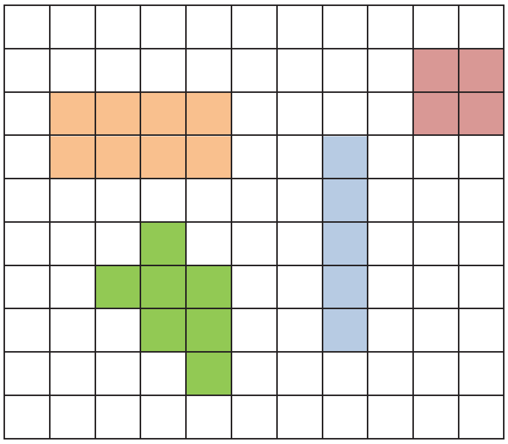
$L=a+b+c+d$



$L=a+b+c+d+e+f$

Şekil 1. Çokgenler

- Alan, matematikte temel kavramdır ve tanımsız kabul edilir, ancak sezgisel olarak zihnimizde ne olduğunu tasarlıyoruz. Düzlemsel şeklin alanı, bir şekilde onun büyüklüğünün ne kadar olduğunu göstermektedir, yani incelenen şekil düzlemin ne kadar kısmını kapladığını gösterir.
- Düzlemsel şekillerin çizildiği düzlem parçasını eş kareliklere ayırırsak, verilen her şeklin kaç kare kapsadığını ya da örttüğünü sayabiliriz. Düzlemin o kısmı incelenen düzlemsel şeklin alanı sayılacaktır. Şekil 2 de farklı sayılarla işaretlenmiş birkaç düzlemsel şekil gösterilmiştir. Şekillerin her birinin üzerine yayıldığı karelerin sayısı, bize her bir şeklin ne kadar yüzey kapladığını gösterir ve o yüzey onların alanıdır. Alanı bizim kitaplarda genellikle P.



Şekil 2.

❖ Verilen şeklin alanı, bulunduğu konumuna bağlı değildir.

Çokgenin alanı için şu aksiyomlar doğrudur:

- ❖ Bir çokgenin alanı P pozitif sayı ya da sıfırdır, yani $P \geq 0$ dır.
- ❖ Eş çokgenlerin eşit alanları vardır;
- ❖ Ortak iç noktaları olmayan iki ya da daha fazla çokgenden oluşan şeklin alanı, oluştuğu çokgenlerin alanlarının toplamına eşittir.
- ❖ Kenarı 1cm **olan** karenin alanı 1cm^2 dir.

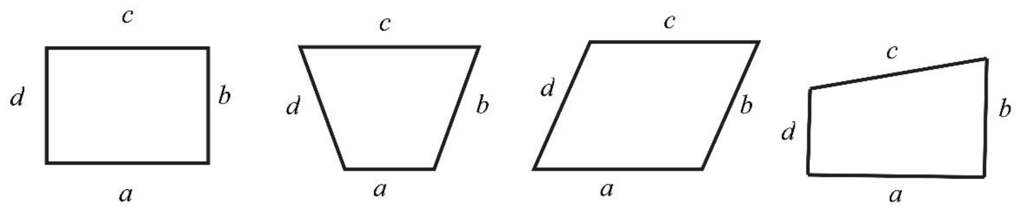
SI birim sisteminde alan ölçü birimi **metre karedir** (m^2).

Dört kenarı olan (dört köşesi, dört açısı) çokgene **dörtgen** denir.

- Örnek, ilkokuldan bildiğiniz kare, dikdörtgen ve yamuk dörtgenlerdir.

- ❖ Verilen dörtgenin kenarlarının uzunlukları toplamına **dörtgenin çevresi** denir.
- ❖ Dörtgenin kenarlarını genellikle a, b, c, d gibi Latin alfabesinin küçük harfleriyle işaret ediyoruz. Kenarlar bu şekilde işaretlenen dörtgenin çevresi için şu formülü kullanacağız:

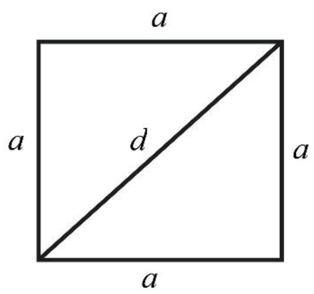
$$L = a + b + c + d$$



Şekil 3. Dörtgenler

1.1. Kare

❖ **Kare**, tüm kenarları ve açıları eşit olan dörtgendir. Dörtgenin iç açıları toplamı 360^0 olduğu bilindiğine göre, karenin her açısının ölçüsü de 90^0 olduğu bellidir, yani karenin tüm açıları diktir.



Şekil 4. Kare

Karenin her kenarını a ile işaret edersek:

❖ karenin çevresi

$$L = 4a$$

formülüyle hesaplanacaktır.

❖ Karenin alanı

$$P = a^2$$

formülüyle hesaplanacaktır.

Karenin köşegenini d ile işaret edelim. Bu durumda karenin alanı için şu formülü de kullanabiliriz:

$$P = \frac{d^2}{2}.$$

Bu son formül, dik üçgene ait Pisagor teoreminden elde edilir; yani karenin iki kenarından ve köşegenden elde edilen dik üçgene Pisagor teoremini uyguluyorsak:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad \Rightarrow \qquad a^2 = \frac{d^2}{2}$$

elde edilir, yani

$$P = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

elde edilir.

Örnek 1 Kenarı $a = 6cm$ olan kare verilmiştir. Karenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

$$L = 4a = 4 \cdot 6cm = 24cm$$

$$P = a^2 = (6cm)^2 = 36cm^2.$$

Karenin çevresi 24cm, alanı 36cm^2'dir.

Örnek 2 Bir karenin kenarı:

a) iki defa artarsa,

b) iki defa azalırsa,

çevresi ne kadar, alanı ise ne kadar değişecektir?

Karenin kenarı a olsun. Onun çevresi L $= 4a$, alanı ise $P = a^2$ dir.

a) Karenin kenarı iki defa artarsa, yani kenarı $2a$ ise, çevresi $L = 4(2a) = 8a$, alanı ise $P = (2a)^2 = 4a^2$ elde edilir.

Şu sonuca varıyoruz: karenin kenarı iki defa artarsa, çevresi de 2 defa artacaktır, alanı ise 4 defa artacaktır.

b) Karenin kenarı 2 defa azalırsa, kenar $\frac{a}{2}$, olur. Bu durumda çevresi $L = 4 \cdot \frac{a}{2} = 2a$, olur, alanı ise $P = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ olur.

Buna göre, karenin kenarı iki defa azalırsa, çevresi de iki defa azalır, alanı ise dört defa azalır.

Örnek 3 Köşegeni $d = 6cm$ olan karenin çevresini hesaplayınız.

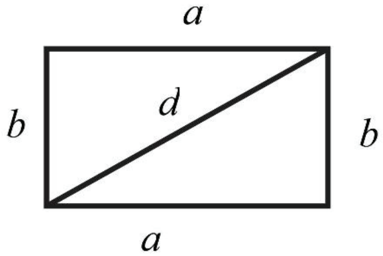
Karenin çevresini hesaplamak için, kenarının uzunluğunu bilmemiz gerekir. Pisagor teoreminden $d = a\sqrt{2}$ yani, $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ elde edilir. Ödevin koşuluna göre: $a = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ yani, $P = 4a = 4 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ elde edilir.

1 Kare biçiminde bir tarlanın:
a) kenarı $250m$; b) köşegeni $500m$.
ise, alanı ne kadardır?

2 Kare biçiminde bir avlunun kenarı 15 m dir. Avluyu üç sıra telle sarmak için kaç metre tel gerekir?

1.2. Dikdörtgen

❖ **Dikdörtgen,** dört açısı dik olan dörtgendir.



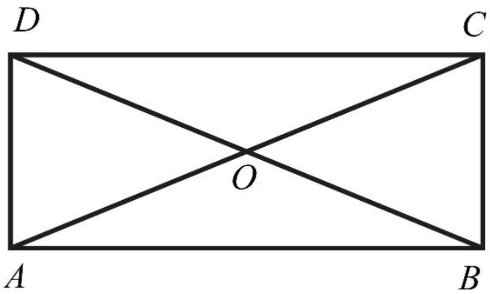
Şekil 5. Kare

Dikdörtgenin karşıt kenarları birbirine eşit ve paraleldirler.

Dikdörtgenin çevresi ve alanı şu formüllerle hesaplanır:

> Dikdörtgenin kenarlarını a ve b ile işaret edersek:
>
> ❖ **dikdörtgenin çevresi**
>
> $$L = 2a + 2b$$
>
> formülüyle hesaplanacaktır.
>
> ❖ **Dikdörtgenin alanı**
>
> $$P = a \cdot b$$
>
> formülüyle hesaplanacaktır.

Şekildeki $ABCD$ dikdörtgeninde AC ve BD köşegenleri çizilmiştir. Neden $\overline{AC} = \overline{BD}$ dir?



Şeklin incelenmesiyle ΔABC ve ΔBAD üçgenleri birbiriyle eş olduklarını görüyoruz, çünkü $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$, $\overline{BC} = \overline{AD}$ dir. Üçgenlerin eşliğinden karşılıklı kenarlar gibi $\overline{AC} = \overline{BD}$ elde edilir.

Bununla şu özellik ispatlanmıştır:

> Her dikdörtgende köşegenler birbirine eşittir.

Ters iddia da geçerlidir ve onu dikdörtgen kuralı olarak kabul edebiliriz.

Dikdörtgenin köşegeni d ve kenarı a için şu eşitlik geçerlidir:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

Örnek 4 Kenarları $a = 7cm$ ve $b = 5cm$ olan dikdörtgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

$$L = 2a + 2b = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 24$$

$$P = a \cdot b = 7 \cdot 5 = 35.$$

Örnek 5 Alanı $48cm^2$ ve bir kenarı $8cm$ olan dikdörtgenin çevresini ve köşegenini hesaplayınız.

$$P = 48, \quad a = 8 \qquad \Rightarrow \qquad b = 6$$

$$L = 2a + 2b = 16 + 12 = 28$$

$$d^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow d = 10.$$

3 Bir tatil evi sahibinin arka bahçesinde, boyutları 50m ve 15m olmak üzere dikdörtgen biçiminde bir havuzu vardır. Havuz etrafında 200 cm genişliğinde bir patika yapılmıştır. Patikanın alanı ne kadardır? Havuzun sahibi, havuz etrafında hareket ederek havuzu bir defa çepeçevre geçmek için kaç metre yürüyecektir?

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Bir karenin kenarı:
   a) üç defa artarsa,
   b) üç defa azalırsa, çevresi ne kadar, alanı ise ne kadar değişecektir?

2. Köşegeni 18 cm olan karenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

3. Alanı 81 cm^2 olan karenin çevresini ve bir köşegenini hesaplayınız.

4. Bir karenin köşegeni ve kenarının farkı 3 cm dir. Karenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

5. Köşegeni 15cm ve kenarı 9cm olan bir dikdörtgen ve bir karenin alanları aynıdır. Karenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

6. Bir dikdörtgenin bir kenarı 9cm, diğer kenarı ise köşegeninden 3cm küçüktür. Dikdörtgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

7. Bir dikdörtgenin kenarları 2:3 oranındadır. Küçük kenarı 2cm azaltır, büyük kenarı ise 2cm büyütürsek, dikdörtgenin alanı $18cm^2$ azalacaktır. Dikdörtgenin kenarlarını hesaplayınız.

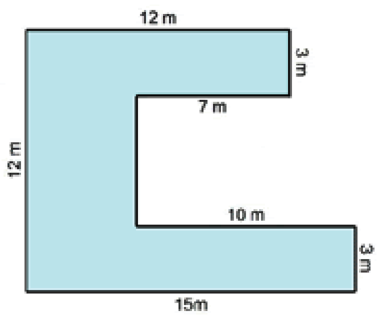
8. Boyutları 3cm ve 4cm ve kalınlıkları aynı olan dikdörtgen şeklinde iki metal plaka, aynı kalınlıkta kare biçiminde yeni bir metal plakaya dökülüyor. Karenin kenarı ne kadardır?

9. Bir öğrenci, kenarı 5cm olan kare biçiminde bir kağıt parçasından, kenarları 4cm ve 1cm olan dikdörtgen parça kesmelidir. Dikdörtgen kesildikten sonra kağıt parçasından kalan kısmın alanı ne kadardır? O şekil hangi dörtgenlerden oluşur?

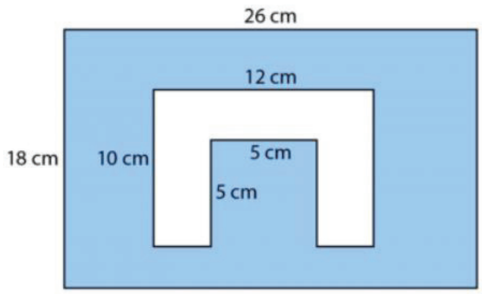
10. İki kardeş, kenarı 250m olan kare şeklinde bir tarlayı şu şekilde paylaşıyorlar: Tarlanın her kenarını 2:3 oranında bölüyor ve kenarlar üzerinde işaretlenen noktaları birleştirerek yeni kare elde ediyorlar. Elde edilen yeni kareyi kardeşlerden biri, diğeri ise kalan 4 parçayı alacaktır. Hangi kardeş daha büyük kısım almıştır?

11. Verilen şeklin alanını hesaplayınız.

a)

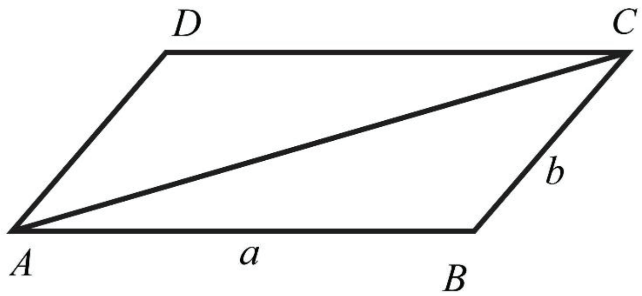


b)



2. Paralelkenarın Çevresi ve Alanı

Paralelkenar iki çift paralel kenarı olan dörtgendir.



Şekil 6. Paralelkenar

Paralelkenarı tanımlamak için, yani bir dörtgenin paralelkenar olup olmadığını tespit etmek için birçok kural vardır.

Bir dörtgenin köşegenleri, kesişim noktasında birbirini yarıya bölerse o dörtgen paralelkenardır.

Bir dörtgenin ikişer karşıt kenarı paralel ve eşit ise, o dörtgen paralelkenardır.

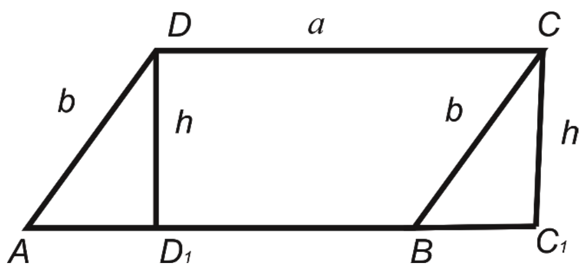
Paralelkenarın çevresini hesaplamak için şu formül doğrudur:

Paralelkenarın kenarlarını a ve b ile işaret edersek:

paralelkenarın çevresini şu formülle hesaplayacağız:

$$L = 2a + 2b.$$

Paralelkenarın alanını hesaplamak için formülü belirtelim. Şekil 7 de verilmiş olan a ve b kenarlı $ABCD$ paralelkenarını inceleyelim. D köşesinden AB kenarına çizilen yükseklik DD_1 ve C köşesinden aynı kenara çizilen yükseklik CC_1 olsun. Her iki yüksekliğin uzunluğu aynıdır ve h_a ile işaret edelim.



Şekil 7.

ADD_1 ve BCC_1 üçgenleri birbiriyle eştir (kendiniz ispatlamayı deneyiniz) ve bu yüzden $ABCD$ paralelkenarı ve D_1C_1CD dikdörtgeninin alanı birbirine eşittir:

$$P_{ABCD} = P_{ADD_1} + P_{D_1BCD} = P_{D_1BCD} + P_{BC_1C} = P_{D_1C_1CD}$$

D_1C_1CD dikdörtgeninin alanı: $P = a \cdot h_a$ olduğuna göre, $ABCD$ paralelkenarının alanı da aynı olacaktır.

Buna göre **paralelkenarın alanını** şu formülle hesaplayacağız:

$$P = a \cdot h_a.$$

Aynı şekilde b kenarını ve ona karşı indirilen yüksekliği incelersek yukarıda yapılan işlemlerin aynısını uygulayarak şu formül elde edilecektir:

$$P = b \cdot h_b.$$

Buna göre şunu bilmeliyiz:

Paralelkenarın kenarlarını a ve b ile, a kenarına indirilen yüksekliği h_a ile, b kenarına indirilen yüksekliği h_b ile işaret edersek:

paralelkenarın alanını şu formülle hesaplayacağız:

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$

Örnek 1 Kenarları 6cm ve 9cm olan paralelkenarın a kenarına karşılık gelen yüksekliği 4cm dir. Paralelkenarın b kenarına karşılık gelen yüksekliği ne kadardır?

Ödevin verilen koşullarına göre:

$$a=6,\ b=9,\ h=4$$
$$L=2a+2b=12+18=30$$
$$P=a\cdot h_a=6\cdot 4=24$$

Paralelkenarın çevresi 30cm ve alanı 24cm^2 dir. b kenarına karşılık gelen yüksekliğini hesaplamak için $P = b \cdot h_b$ formülünden yararlanacağız. Son eşitlikte bilinen büyüklükleri değiştirmekle:

$$24=9\cdot h_b,\quad \text{oradan da}\quad h_b=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}.$$

elde edilir. Demek ki h_b nin uzunluğu $\frac{8}{3}$ dir.

Örnek 2 Kenarı a = 16cm ve alanı 48cm^2 olan paralelkenarın bir kenarı diğerinden iki defa küçüktür. Paralelkenarın yüksekliklerini ve çevresini hesaplayınız.

$$P=a\cdot h \Rightarrow 48=16\cdot h \ \Rightarrow \qquad h_a=3.$$

1) Verilen kenar küçüğü ise, b = 32 ve h_b = 1,5 dir. O halde çevresi

$$L=2a+2b=32+64=96 \text{ dir.}$$

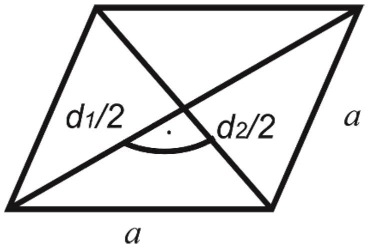
2) Verilen kenar büyüğü ise, b = 8 ve h_b = 6 olur. O halde çevresi

$$L=2a+2b=32+16=48 \text{ dir.}$$

1 Arif'in paralelkenar şeklinde bir çayırı vardır. Paralelkenarın bir kenarı 250m ve o kenara karşılık gelen yüksekliği 100m dir. Çayırın alanını hesaplayınız. Bu alan hektarla ifade edilişi ne kadardır?

Tüm kenarları eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir.

Şunu da hatırlayalım: Dört kenarı eşit ve tüm açıları dik olan kare de bir paralelkenardır. Aynı şekilde kare, tüm açıları dik olan eşkenar dörtgen gibi incelenebilir.



Şekil 8. Eşkenar dörtgen

Eşkenar dörtgen için şu kurallar geçerlidir:

Bir paralelkenarın köşegenleri birbirine dik ise, o bir eşkenar dörtgendir.

2 Eşkenar dörtgen için şu kuralı ispatlamaya çalışınız.

Eşkenar dörtgenin köşegeni, karşıt açılarının açıortayıdır.

Eşkenar dörtgenin çevresini ve alanını hesaplamak için şu formüller doğrudur:

- Eşkenar dörtgenin kenarını a ile işaret edersek onun **çevresini** şu formülle hesaplayacağız:

$$L = 4a.$$

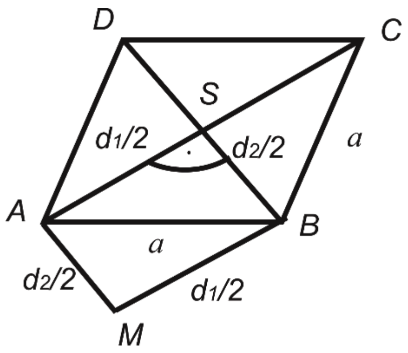
- **Eşkenar dörtgenin alanını** paralelkenarın alanını hesapladığımız gibi hesaplayabiliriz: eşkenar dörtgenin kenarı a ve yüksekliğini h_a ise, onun alanını şu formülle hesaplayacağız:

$$P = a \cdot h_a$$

- Eşkenar dörtgenin diğer niteliği, köşegenlerinin birbirine dik olmasıdır. Köşegenleri d_1 ve d_2 ile işaret edelim.
- Eşkenar dörtgenin alanı şu formülle de hesaplanabilir:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Son formülü ispatlayalım. Şekil 9' daki eşkenar dörtgeni inceleyeceğiz.



Şekil 9.

$ABCD$ eşkenar dörtgenin alanı, eşkenar dörtgenin köşegenleriyle bölünmüş olan dört dik üçgenin alanlarının toplamına eşittir. $MB \parallel AS$ ve $AM \parallel SB$ olmak üzere $AMBS$ dörtgenini çizelim. Bu dörtgen S köşesinde ve M köşesinde dik açıları olan bir paralelkenardır. Bu ise demektir ki diğer iki açısı da diktir, yani $AMBS$ dörtgeni dikdörtgendir. Onun alanı $P_1 = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4}$. dir. ΔABM ve ΔDCS üçgenleri eştir, dolayısıyla alanları da eşit olacaktır.

Aynı şekilde, kenarları SC ve SB olan, alanı şu şekilde olacak bir dikdörtgen oluşturabiliriz:

$P_2 = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4}$.

İki dikdörtgenin alanlarının toplamı $P_1 + P_2$ eşkenar dörtgenin alanına eşit olacaktır. Bu şekilde eşkenar dörtgenin alanı için şu formülü elde ediyoruz; .

$$P = 2 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{4} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Not: Üçgenin alanını hesaplamak için kullanılan formülleri bulduktan sonra, eşkenar dörtgenin alanına ait formülü başka şekilde de ispatlayabileceğiz.

Örnek 3

Bir eşkenar dörtgenin alanı 60cm^2, yüksekliği ise 5cm dir. Eşkenar dörtgenin çevresini hesaplayınız.

$P = a \cdot h_a$ formülünden eşkenar dörtgenin kenarlarını hesaplayacağız:

$$60 = a \cdot 5 \Rightarrow a = 12$$

$$L = 4a = 4 \cdot 12 = 48.$$

Eşkenar dörtgenin çevresi, 48 cm dir.

Örnek 4

Bir eşkenar dörtgenin kenarı 12 cm, yüksekliği ise 6cm dir. Köşegenlerinden biri diğerinin iki katı olduğuna göre eşkenar dörtgenin köşegenlerini hesaplayınız.

Eşkenar dörtgenin alanı $P = a \cdot h_a = 12 \cdot 6 = 72$ dir. Diğer taraftan $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$, olduğuna göre

$$72 = \frac{d_1 \cdot 2d_1}{2} \Rightarrow d_1^{\,2} = 72 \Rightarrow d_1 = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \Rightarrow d_2 = 3\sqrt{2} \text{ elde edilir.}$$

❖ Paralelkenarın açıları dik değilse ve komşu kenarları farklı uzunlukta ise o paralelkenara romboid denir.

!

Dikdörtgen, kare, eşkenar dörtgen ve romboid paralelkenarlardır.

3

Bir tarla, kenarı 300m ve dar açısı 450 olan eşkenar dörtgen biçimindedir. Tarlanın alanını hesaplayınız.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Bir paralelkenarın kenar uzunlukları 4cm ve 6cm ve alanı 4,8cm^2 dir. Paralelkenarın yüksekliğini hesaplayınız.

2. Bir paralelkenarın alanı 72 cm^2 dir. Uzunluğu 6cm olan paralelkenarları arasındaki uzaklığı belirtiniz.

3. Bir paralelkenarın kenarları17cm ve 28cm, alanı ise 420 cm^2 dir. Paralelkenarın köşegenlerini ve çevresini belirtiniz.

4. Bir kenarı b = 58cm, köşegenleri d_1= 89cm ve d_2 = 52cm verilmiş olan paralelkenarın çevresini ve alanını hesaplayınız.

5. Çevresi 36cm ve kenarı yüksekliğinin iki katı olan eşkenar dörtgenin alanını hesaplayınız.

6. Bir eşkenar dörtgenin çevresi 52cm dir. Onun bir köşegeni 10cm ise alanını hesaplayınız.

7. Mehmet'in avlusu, kenarları 10m ve 15m ve büyük kenarına karşılık gelen yüksekliği 5m olan bir paralelkenar biçimindedir. Avlunun büyük köşegeni üzerinde yapılan yolun uzunluğunu hesaplayınız. Mehmet'in avlusunun alanı ne kadardır?

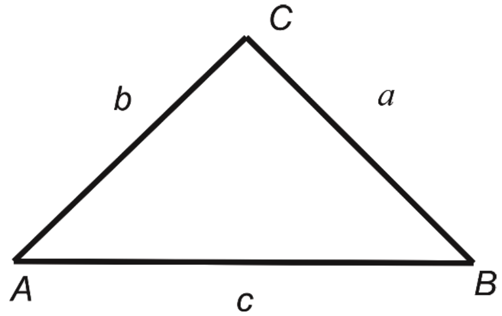
8. Simona'nın, kenarı 5cm ve bir köşegeni 8cm olan eşkenar dörtgen şeklindeki 20 eşit parçadan oluşan bir yapbozu var. Dizilmiş olan yapbozun alanını hesaplayınız.

9. Bir köşegeni 800m olan eş kenar dörtgen biçiminde bir tarla 6 000m tel ile üç sıra tel ile sarılmıştır. Tarlanın alanını hesaplayınız. Alanı ar ile ifade ediniz.

10. Bir kenarı 500m ve çevresi 1400m olan paralelkenar şeklinde bir çayırın, büyük kenarına karşılık gelen yükseklik 100m dir. Çayırın alanını hesaplayınız. Alanı dekar olarak ifade ediniz.

3. Üçgenin Çevresi ve Alanı

❖ **Üçgen**, üç kenarı olan çokgendir. Üçgenin köşeleri A, B ve C ile işaret edilirse, kenarları genellikle A köşesinin karşısındaki kenar a ile, B köşesinin karşısındaki kenar b ile ve C köşesinin karşısındaki kenarı c ile işaret edilir.



Şekil 10. Üçgen

3.1. Çeşitkenar Üçgen

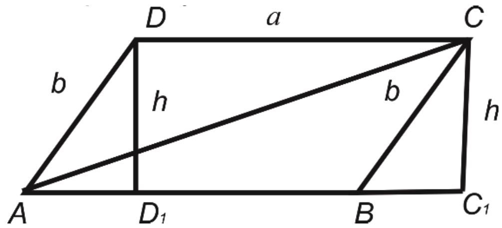
❖ Kenarlarının uzunlukları farklı olan üçgenlere **çeşitkenar üçgen** denir.

Unutmayınız:

❖ Kenarları a, b, c olan üçgenin çevresi:

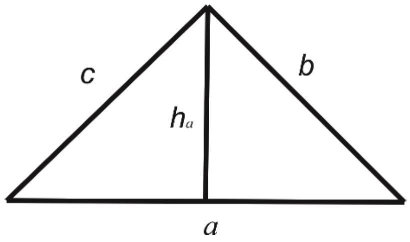
$L = a + b + c$ dir.

Üçgenin alanını hesaplamak için formül bulalım.



Şekil 11.

Şekil 11 de $ABCD$ paralelkenarını inceleyelim. Onun alanı $P = a \,.\, h_a = b \,.\, h_b$ dir. AC kenarıyla paralel iki eşit kısma ayrılmıştır: ΔABC ve ΔCDA, dolayısıyla her birinin alanı paralelkenarın alanının yarısına eşit olacaktır, yani $P = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$



Şekil 12. Bir yüksekliğiyle üçgen

❖ Üçgenin a, b, c kenarlarına ait olan yükseklikleri sırasıyla h_a, h_b, hc ile işaret edersek, üçgenin alanını şu üç formülden biri ile hesaplayacağız:

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \qquad P = \frac{b \cdot h_b}{2} \qquad P = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

❖ Üçgenin her kenarının uzunluğu bilindiği durumda, alanı şu formülle hesaplayabiliriz:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

burada s, üçgenin çevresinin yarısıdır, yani $s = \frac{a+b+c}{2}$. dir. Bu formül **üçgenin alanına ait Heron formülü** diye tanınır.

Örnek 1 Kenarları 26cm, 28cm ve 30cm olan üçgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

Üçgenin çevresi: $L = a+b+c = 26+28+30 = 84$ cm.

Üçgenin üç kenarı bilindiğine göre, alanını Heron formülünü kullanarak hesaplayabiliriz:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{84}{2} = 42$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{42 \cdot (42-26)(42-28)(42-30)}$$

$$P = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 336 \text{ cm}^2.$$

Örnek 2 Bir üçgenin alanı 72cm^2 ve yükseklikleri 8cm, 6cm ve 9cm dir. Üçgenin çevresini hesaplayınız.

$P = 72 \qquad h_a = 8 \qquad h_b = 6 \qquad h_c = 9$

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ formülünden: $72 = \frac{a \cdot 8}{2} \Rightarrow a = 18$ cm elde edilir.

Benzer şekilde: $P = \frac{b \cdot h_b}{2} \Rightarrow 72 = \frac{b \cdot 6}{2} \Rightarrow b = 24$ cm.

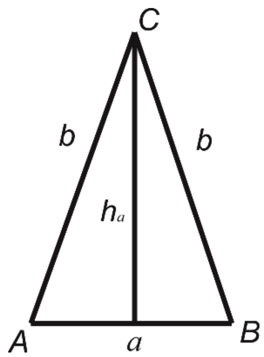
$P = \frac{c \cdot h_c}{2} \Rightarrow 72 = \frac{c \cdot 9}{2} \Rightarrow c = 16$ cm.

Üçgenin çevresi $L = a + b + c = 18 + 24 + 16 = 58$ cm

1 Kenarları 180m, 240m ve 160m olan çeşitkenar üçgen biçiminde bir çayırın alanını hesaplayınız. Çayırın etrafında yapılan yolun uzunluğu kaç metredir?

3.2. İkizkenar Üçgen

❖ İki kenarının uzunlukları eşit olan üçgene **ikizkenar üçgen** denir. Uzunlukları aynı olan kenarlara **yan kenarlar**, üçüncü kenara ise ikizkenar üçgenin **tabanı** denir.



Şekil 13. İkizkenar üçgen

!

❖ İkizkenar üçgenin tabanını genellikle a ile, yan kenarları ise b ile işaret ediyoruz. İkizkenar üçgenin çevresi:

$$L = a + 2b.$$

❖ İkizkenar üçgenin alanını hesaplamak için, çeşitkenar üçgenlerin alanını hesaplamak için kullanılan formüllerden yararlanacağız, yani

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \qquad P = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

Bunlardan başka Heron formülünü de kullanabiliriz.

Örnek 3 Tabanı 8cm ve yan kenarı 12cm olan ikizkenar üçgenin çevresini ve alanını hesaplayınız. Üçgenin her üç yüksekliğinin uzunluğunu belirtiniz.

Üçgenin çevresi: $L = a + 2b = 8 + 2 \cdot 12 = 32$ cm.

Üçgenin üç kenarının uzunluğu bilinir, fakat yüksekliklerden hiçbiri bilinmediğine göre, alanı hesaplamak için Horner formülünü kullanacağız.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 16$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{16 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4}$$

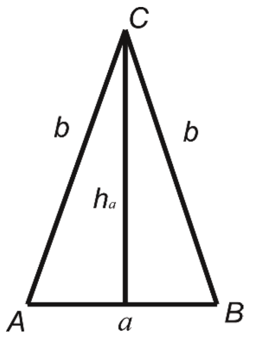
$$P = 32\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

Diğer taraftan

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \Rightarrow 32\sqrt{2} = \frac{8 \cdot h_a}{2} \Rightarrow h_a = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} \Rightarrow 32\sqrt{2} = \frac{12 \cdot h_b}{2} \Rightarrow h_b = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm.}$$

Örnek 4 Tabanı 6cm ve tabana karşılık gelen yüksekliği 4cm olan ikizkenar üçgenin çevresini hesaplayınız.



Şekil 14.

Verilenler: $a = 6$ $h_a = 4$

Üçgenin çevresini hesaplamak için, yan kenarın uzunluğunu belirtmemiz gerekir. Katetleri h_a ve a tabanının yarısı ve hipotenüsü b olan dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayarak:

$$b^2 = (h_a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

elde edilir. Verilen değerleri yerine değiştirmekle: $b^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow b = 5$ bulunur.

O halde üçgenin çevresi $L = a + 2b = 6 + 2 \cdot 5 = 16$ cm dir.

2 Nikola, tabanı 12cm ve tabanına ait açısı 30^0 olan ikizkenar üçgen şeklinde bir plakanın alanını hesaplaması gerekir. Nikola'nın hesapladığı alan ne kadarmış?

3.3. Eşkenar üçgen

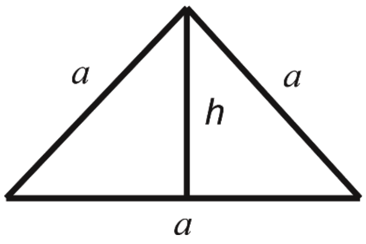
❖ Tüm kenarları eşit olan üçgene **eşkenar üçgen** denir.

Onun çevresi için şu özellik geçerlidir:

!

❖ Eşkenar üçgenin kenarını a ile işaret edersek, onun çevresi.

$$L = 3a\,.$$



Şekil 15. Eşkenar üçgen

Eşkenar üçgenin her kenarına karşılık gelen yükseklikleri birbirine eşittir ve h ile işaret edilir. Eşkenar üçgenin alanını şu formülle hesaplayabiliriz:

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Eşkenar üçgenin yüksekliğini hesaplamak için, Pisagor teoremini uygulayacağız.

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,.$$

Eşkenar üçgenin alanını sadece a kenarıyla ifade edelim:

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,.$$

Buna göre, eşkenar üçgenin alanını hesaplamak için şu ifade geçerlidir:

!

- Eşkenar üçgenin kenarını a ile işaret edersek, onun alanı:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

formülüyle hesaplanır.

Örnek 5 Kenarı 8cm olan eşkenar üçgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

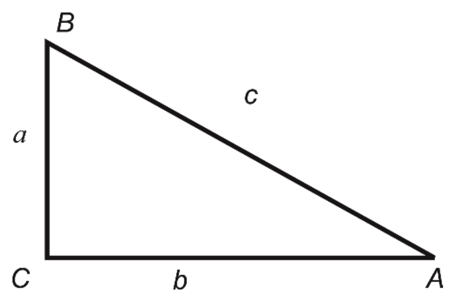
Çözüm: $a = 8$cm $L = 3 \cdot 8 = 24$cm

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

3 Petre ve Lindita iki farklı üçgenin alanını hesaplıyorlar. Petre, kenarı 5cm olan eşkenar üçgeni, Lindita ise tabanı 6cm ve tabanına karşılık gelen yüksekliği 5cm olan ikizkenar üçgeni seçmiştir. Hangi üçgenin alanı daha büyüktür, Petre'nin yoksa Lindita'nın mı?

3.4. Dik Üçgen

- Dik açısı olan üçgene **dik üçgen** denir.



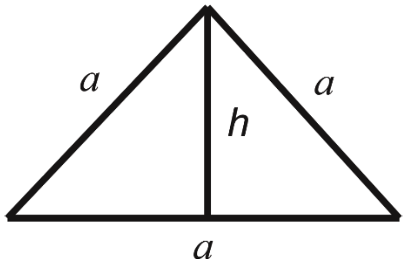
Şekil 16. Dik üçgen

Dik açısı C köşesinde olan dik üçgende, b kenarına çizilen yükseklik a kenarı (kateti) ile ve tersine, C köşesinden a kenarına çizilen yükseklik b kateti ile çakışık olduğunu fark etmeliyiz. Dolayısıyla dik üçgenin alanı için şu formül elde edilir:

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Dik üçgene ait: **Euklit teoremi** ve **Pisagor teoremi** adıyla bilinen iki önemli teorem geçerlidir (bu teoremleri ilkokulda öğrenmişsiniz, burada da birkaç defa kullandık). İlerde bu teoremleri ispatlayacağız.

Euklit teoremi: Dik üçgende a ve b katetlerin c hipotenüsüne izdüşümlerini sırasıyla p ve q ile ve C köşesinden hipotenüse indirilen yüksekliği h ile işaret edersek, o halde $h^2 = pq$ eşitliği geçerlidir (şekil 17).



Şekil 17.

Dik üçgenin C köşesinden hipotenüse çizilen yükseklik dik üçgeni iki benzer üçgene ayırması sonucu olarak Euklit teorem elde edilmiştir.

İspat: ABC dik üçgeninde C köşesinden hipotenüse çizilen yükseklik $CC_1 = h$ olsun, o halde ΔCC_1A ve ΔBC_1A üçgenleri dik üçgenlerdir. Daha da B köşesindeki açı ve A köşesindeki açı tümler açılardır, aynı şekilde B köşesindeki açı ve $\measuredangle BCC_1$ açıları tümler açılardır. O halde $\measuredangle BCC_1$ ve A köşesindeki açılar birbirine eşittir. Aynı şekilde $\measuredangle ACC_1$ ve B köşesindeki açı birbirine eşittir, bu ise demektir ki, ΔCC_1A ve ΔBC_1A üçgenlerin karşılıklı açıları birbirine eşittir, dolayısıyla onlar benzer üçgenlerdir. Onların karşılıklı kenarları orantılı olduğuna göre, şu eşitlik geçerlidir:

oradan da:

$$h : p = q : h$$

elde edilir. Bununla teorem ispatlanmıştır.

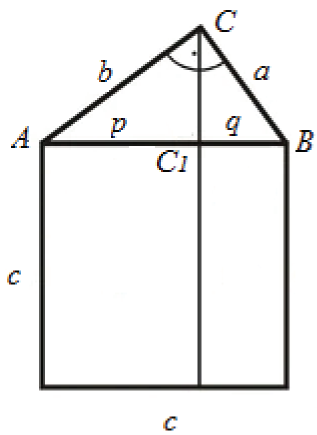
$$h^2 = pq$$

Pisagor teoremi: Bir dik üçgende a ve b katetler ve c hipotenüs ise:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

eşitliği geçerlidir.

Pisagor teoremini ispatlayalım.



Şekil 18.

İspat: Şek. 18'de verilen ΔABC üçgenini inceleyelim. p ve q hipotenüse çizilen katetlerin izdüşümleri olsun. ΔAC_1C ve ΔACB benzer üçgenlerdir (karşılıklı açıları eşittir), dolayısıyla onların kenarları orantılıdır, yani şu eşitlik geçerlidir:

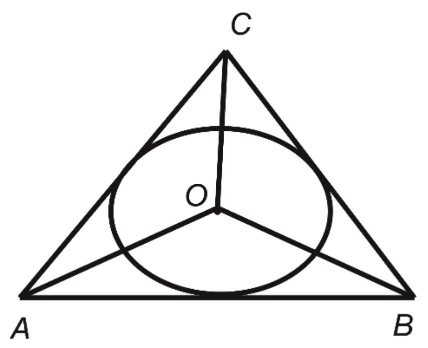
$p:b=b:c$ ordan da $p=\frac{b^2}{c}$ elde edilir. ΔBC_1C ve ΔBCA üçgenlerin benzerliğinden $q:a = a:c$, yani $q=\frac{a^2}{c}$ elde edilir.

c hipotenüsü üzerinde kare çiziyoruz. ΔABC üçgeninde hipotenüse çizilen yüksekliği devam edersek, kareyi iki dikdörtgene ayırmış olacağız. Bu dikdörtgenlerin alanları sırasıyla $pc=\frac{b^2}{c}\cdot c=b^2$ ve $qc=\frac{a^2}{c}\cdot c=a^2$ olduğunu elde ediyoruz. O halde karenin alanı c^2, bölünmüş olduğu iki dikdörtgenin alanlarının toplamına eşit olacaktır (şekil 18), yani $c^2 = a^2 + b^2$ olduğunu elde ediyoruz. Bununla Pisagor teoremini ispatlamış oluyoruz.

4 Hipotenüsü 4cm olan bir ikizkenar dik üçgenin çevresi $4(1+\sqrt{2})$ cm dir. Üçgenin alanını hesaplayınız.

3.5. Üçgenin İçten Teğet Çemberi ve Üçgenin Çevrel Çemberi

Verilen bir üçgende açılarının açıortayları bir noktada kesişiyorlar. O nokta üçgenin her kenarına (içten) değen çemberin merkezidir ve bu çembere üçgenin **içten teğet çemberi** denir.



Şekil 19. Üçgenin içten teğet çemberi

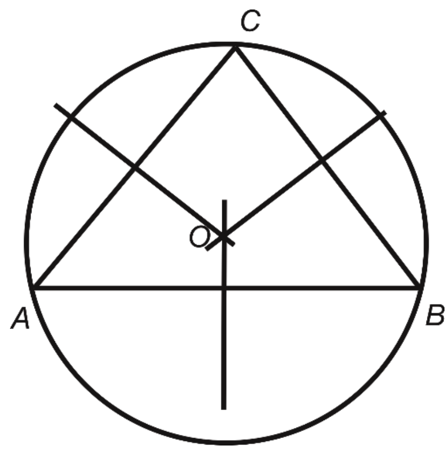
!

- Eğer r bir üçgendeki yazılı dairenin yarıçapı ise ve s üçgenin yarı çevresi ise, $s=\frac{a+b+c}{2}$. Üçgenin alanı:

$$P=r\cdot s.$$

- Kenarı a olan bir eşkenar üçgende, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Herhangi bir üçgenin kenarlarının orta dikmeleri daima bir noktada kesişir ve bu nokta üçgenin köşelerinden geçen çemberin merkezidir. Bu çembere **üçgenin çevrel çemberi** denir.



Şekil 20. Üçgenin çevrel çemberi

- Kenarları a, b, c olan bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapını r ile, işaret edersek, üçgenin alanı için şu formül geçerlidir:

$$P=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}.$$

- Kenarı a olan bir eşkenar üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı a , $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ile hesaplanır.

Örnek 6 Kenarları 6cm, 9cm ve 10cm ve içten teğet çemberinin yarıçapı 4cm olan üçgenin alanını hesaplayınız.

$$s=\frac{6+9+10}{2}=\frac{25}{2} \qquad r=4$$

$$P=r\cdot s=4\cdot\frac{25}{2}=50\text{ cm}^2.$$

Örnek 7 Katetleri 3cm ve 4 cm olan bir dik üçgenin içten teğet ve çevrel çemberinin yarıçapını hesaplayınız.

Dik üçgenin alanı $P=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{12}{2}=6\text{ cm}^2$ dir.

Hipotenüsü, Pisagor teoremini kullanarak hesaplayacağız:

$$c^2=3^2+4^2=25\Rightarrow c=5\text{ cm}$$

$$P=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}\Rightarrow 6=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4R}\Rightarrow R=\frac{15}{6}=2,5\text{ cm}$$

Dik üçgende çevrel çemberin yarıçapı, hipotenüsün yarısına eşit olduğunu da fark edebiliriz, yani dik üçgen etrafında çizilen çevrel çemberin çapı, aynı zamanda dik üçgenin hipotenüsüdür. Bu iddia her dik üçgen için geçerlidir ve dik üçgene ait Tales teoremi adıyla tanınır.

Dik üçgene ait Tales teoremi: AB çap olmak üzere, A, B, C bir çembere ait üç nokta olduğu durumda $\measuredangle ACB$ açısı diktir.

Son teorem, her çevre açı ona karşılık gelen, yani aynı yayı gören merkez açının yarısına eşittir iddiası, aslında Tales teoreminin bir özel durumudur.

5 Kenarları 21cm, 17cm ve 10cm olan üçgenin çevrel ve içten teğet çemberinin yarıçapını hesaplayınız.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Bir ikizkenar üçgen çiziniz ve kenarlarını işaret ediniz. Tabanı 6cm ve yan kenarı 5cm olan ikizkenar üçgenin alanını ve çevresini hesaplayınız.

2. Yüksekliği 9cm olan eşkenar üçgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

3. Bir üçgenin iki kenarının uzunluğu 7cm ve 9 cm ve alanı $12\sqrt{5}$ cm^2 dir. Üçgenin çevresini hesaplayınız.

4. Bir dik üçgen çiziniz ve kenarlarını işaret ediniz. Katetleri 3cm ve 4cm olan dik üçgenin alanını ve çevresini hesaplayınız.

5. Bir ikizkenar üçgenin yan kenarı 17cm, tabanına karşılık gelen yüksekliği ise 15cm dir. Üçgenin alanını ve çevresini hesaplayınız.

6. Bir üçgenin kenarları 24cm, 25cm ve 7cm dir. Çemberin içten teğet çemberini ve çevrel çemberinin yarıçapını hesaplayınız.

7 Kenarı 10cm olan eşkenar üçgenin içten teğet çemberini ve çevrel çemberinin yarıçapını hesaplayınız.

8 Bir ikizkenar üçgenin tabanı 12cm ve yan kenarı 10cm dir. Üçgenin içten teğet çemberini ve çevrel çemberinin yarıçapını hesaplayınız.

9. Alanı 270cm^2 olan bir dik üçgenin katetleri 5 : 3 oranındadır. Hipotenüsün uzunluğunu hesaplayınız.

10. Duvara asılı olan bir resim dik üçgen biçimindedir. Bu üçgenin katetlerinin hipotenüse izdüşümleri 16cm ve 9cm dir. Dik üçgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

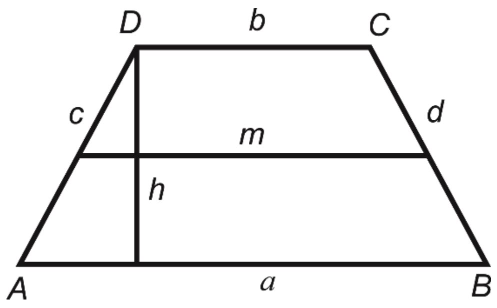
11. Slavko'nun duvarda ikizkenar üçgen şeklinde bir resmi var. Üçgenin çevresi 78cm, resmin yan kenarı ve tabanı arasındaki fark 6cm dir. Slavko'nun duvardaki resminin alanı ne kadardır?

12. Klara, bir kağıt parçasından kenarları 2 :3 : 4 oranında olan bir üçgen kestikten sonra, içinde yarıçapı $0,5\sqrt{15}$ cm olan içten teğet bir çember çizmiştir. Klara'nın kestiği üçgenin kenarlarını hesaplayınız.

4. Yamuk ve Trapezoidin Çevresi ve Alanı

4.1. Yamuk

❖ **Trapezi** është katërkëndësh që ka vetëm një çift të brinjëve paralele. Brinjët paralele i quajmë **bazat** e trapezit, kurse dy brinjët e tjera i quajmë **krahë**.



Şekil 21. Yamuk

❖ Yamuğun tabanlarını a ve b ile, yan kenarları c ve d ile işaret edersek, yamuğun çevresi

$$L = a + b + c + d \text{ dir.}$$

❖ Yan kenarları eşit olan yamuğa **ikizkenar yamuk** denir. İkizkenar yamuğun yan kenarlarını c ile işaret edersek, onun çevresi

$$L = a + b + 2c \text{ dir.}$$

❖ Yamuğun alanı şu formülle hesaplanır:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h\,,$$

burada h, tabanlardan birine çizilen yükseklıktir, yani tabanlar arasındaki uzaklıktır.

Është e rëndësishme ta dish këtë veti për vijën e mesme të trapezit:

❖ Yamuğun yan kenarlarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasına yamuğun **orta tabanı** denir. Yamuğun orta tabanı genellikle m ile işaret edilir ve onun için: $m = \frac{a+b}{2}$ eşitliği doğrudur. Bu eşitliği yamuğun alanına ait formülde değiştirmekle:

$$P = m \cdot h\,.$$

formülü elde edilir.

Şu çözülmüş örnekleri inceleyelim:

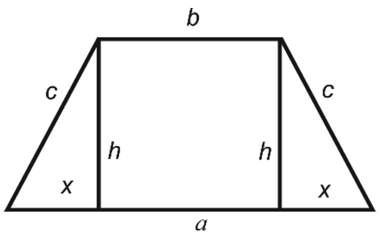
Örnek 1 Tabanları 12cm, 8cm ve yüksekliği 7cm olan yamuğun alanını hesaplayınız.

$a = 12\text{cm}$ $\qquad b = 8\text{cm}$ $\qquad h = 7\text{cm}$

$$P = \frac{12+8}{2} \cdot 7 = 70\,\text{cm}^2.$$

Örnek 2 Tabanları 16cm, 10cm ve yan kenarı 5cm olan ikizkenar yamuğun çevresini ve alanını hesaplayınız.

Yamuğun çevresi: $L = 16 + 10 + 2 \cdot 5 = 36\,\text{cm}$.



Şekil 22. İkizkenar yamuk

Yamuğun alanını hesaplamak için, onun yüksekliğini belirtmemiz gerekir. Katetleri h ve x ve hipotenüsü c olan dik üçgenden, Pisagor teoremine göre $h^2 = c^2 - x^2$ geçerlidir. Burada: $x = \frac{a-b}{2}$ dir.

$x = \frac{16-10}{2} = 3\text{cm}$ $\qquad h^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow h = 4\text{cm}$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{16+10}{2} \cdot 4 = 52\,\text{cm}^2.$$

İkizkenar yamuğun özelliklerini açıklayan ve çok sık konkre problemlerin çözümünde kullanılan şu teoremler doğrudur:

Teorem: İkizkenar yamukta aynı yan kenara ait iki açı **komşu bütünler açılardır.**

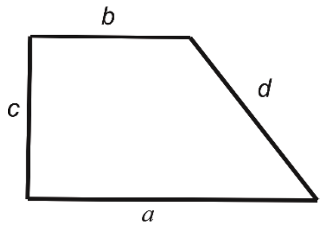
1 Önceki teoremi ispatlayınız.

İkizkenar yamuk için şu iki özellik de geçerlidir:

Teorem: İkizkenar yamukta aynı tabana ait iki açı birbirine eşittir.

Teorem: İkizkenar yamuğun köşegenleri birbirine eşittir.

❖ Bir dik açısı olan yamuğa **dik yamuk** denir. Dik yamukta yükseklik bir yan kenar ile çakışıktır.



Şekil 23. Dik yamuk

Örnek 3 Tabanları 12cm ve 19cm ve yan kenarları 7cm ve 9cm olan dik yamuğun çevresini ve alanını hesaplayınız.

$$L = 12 + 19 + 7 + 9 = 47 \text{ cm.}$$

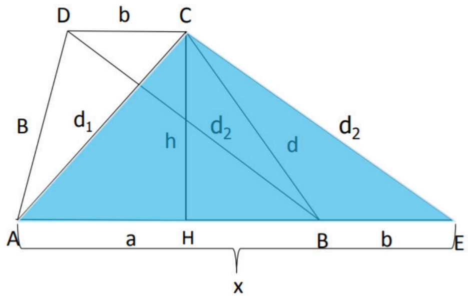
Dik yamuğun yüksekliği, küçük yan kenar ile eşittir. Buna göre h = 7cm dir.

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+19}{2} \cdot 7 = \frac{31}{2} \cdot 7 = \frac{217}{2} \text{ cm}^2.$$

2 Dik yamuğun paralel olmayan kenarlarının uzunlukları 17cm ve 8cm dir. Yamuğun çevresi 94cm olduğuna göre, alanını hesaplayınız.

Şu iki örneği de inceleyelim:

Örnek 4 Köşegenleri 13cm ve 15cm ve yüksekliği 12cm olan yamuğun alanını hesaplayınız.



Verilenler: d_1 = 13cm, d_2 = 15cm, h = 12cm dir.

d_2 köşegenine paralel olan CE doğru parçasını çiziyoruz. Bu şekilde AEC üçgenini elde ediyoruz. Kenar $x = a + b$ dir.

Pisagor teoreminden yararlanarak, ΔAHC ve ΔEHC dik üçgenlerinden AH ve HE uzunluklarını belirtiyoruz.

$$\overline{AH} = \sqrt{d_1^2 - h^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5\text{cm.}$$

$$\overline{EH} = \sqrt{d_2^2 - h^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9\text{cm.}$$

$$x = \overline{AH} + \overline{HE} = 5 + 9 = 14\text{cm.}$$

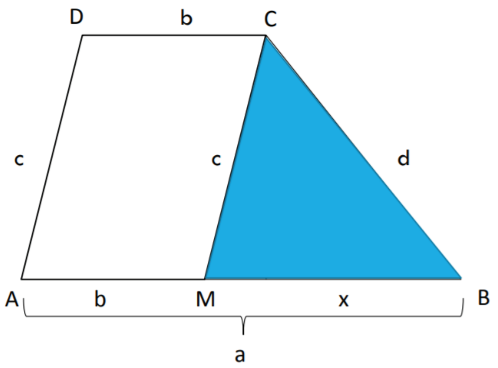
Diğer taraftan $x = a + b = 14$cm.
O halde yamuğun alanı

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = 7 \cdot 12 = 84\text{cm}^2.$$

olduğunu buluyoruz.

Örnek 5

Tabanları 30cm ve 19cm ve yan kenarları 13 ve 20cm olan yamuğun alanını hesaplayınız.



Verilenler: Tabanları 30cm ve 19cm ve yan kenarları 13 ve 20cm.

c kenarına eşit ve ona paralel olan CM doğru parçasını çizeriz. Bu şekilde ΔMBC üçgenini elde diyoruz. Kenarı $x = a - b = 30 - 19 = 11$cm dir.

ΔMBC üçgeninin tüm kenarlarının uzunlukları bilindiğine göre, Heron formülü yardımıyla onun alanını hesaplayabiliriz.

Onun kenarlarının toplamının yarısı için:

$$S = \frac{c+d+x}{2} = \frac{13+20+11}{2} = 22.$$

$$P = \sqrt{s(s-c)(s-d)(s-x)} = \sqrt{22 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 11}$$

$$P = \sqrt{4356} = 66\text{cm}^2.$$

ΔMBC üçgeninin alanın $P = \frac{x \cdot h}{2}$, formülüyle hesaplanabildiğini biliyoruz. Burada h, yamuğun yüksekliği olarak ΔMBC nin de yüksekliğidir.

Buna göre, $h = \frac{2P}{x} = \frac{132}{11} = 12\text{cm}$ dir.

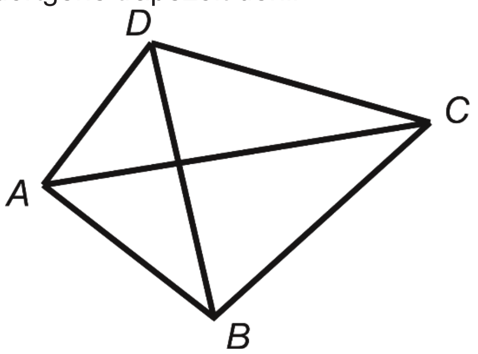
Oradan, yamuğun alanı için şunlar elde edilir:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{30+19}{2} \cdot 12 = 294\text{cm}^2.$$

3 Tabanları 19cm ve 2cm ve köşegenleri 17cm ve 10cm verilmiş olan yamuğun alanını hesaplayınız.

4.2. Trapezoit (Çeşitkenar dörtgen)

❖ Paralel kenarları olmayan dörtgene trapezoit denir.



Şekil 24. Trapezoit

Trapezoidin alanını, hesaplamak için onu üçgenlere ayırıyoruz, dolayısıyla trapezoidin alanı üçgenlerin alanlarının toplamıdır (hangi elemanların verilmiş olduğuna bağlı olarak). Örnek, köşegenlerden biri ile dörtgen iki üçgene ayrılıyor. İki köşegenle ise dörtgen dört tane üçgene ayrılıyor.

Örnek 6 Bir trapezoidin bir köşegeni $\overline{BD} = 12$ cm, olarak A ve C köşeleri bu köşegenden sırasıyla 7cm ve 6cm uzaklıktadır. Trapezoidin alanını hesaplayınız.

Trapezoidin alanı, ΔABD ve ΔBCD üçgenlerin alanlarının toplamı olacaktır. $\overline{BD}$ köşegeni bu üçgenlerin ortak kenarıdır. A köşesinden $\overline{BD}$ köşegenine uzaklık, aslında ΔABD üçgeninin $\overline{BD}$ kenarına ait yüksekliğidir.

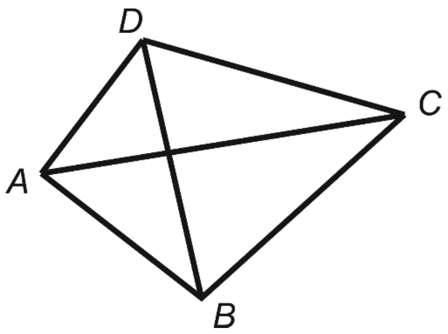
Benzer şekilde ΔBCD üçgeninin C' den $\overline{BD}$ ye uzaklığı o üçgenin yüksekliğidir (Şekil yapınız!).

Trapezoitin alanı için şunu elde ediyoruz:

$$P = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD} = \frac{12 \cdot 7}{2} + \frac{12 \cdot 6}{2} = 42 + 36 = 78 \text{ cm}^2.$$

4.3. Deltoit

❖ Birbirine eşit iki çift kenarı olan dörtgene **deltoit** denir. Deltoidin köşegenleri birbirine göre diktir. Büyük olan köşegen, küçük köşegenin orta dikmesidir.



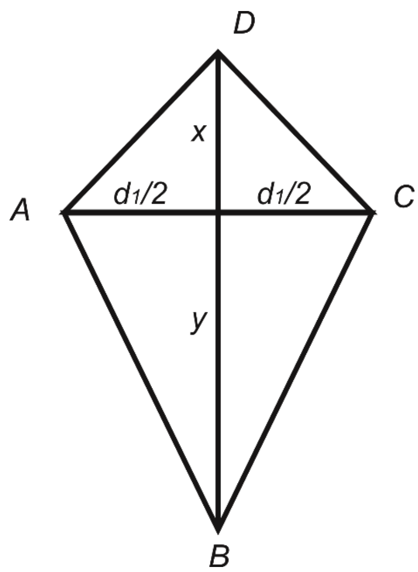
Şekil 25. Deltoidi

❖ Köşegenleri d_1 ve d_2 olan deltoidin alanın

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

formülüyle hesaplanır.

Bu formül çok kolay ispatlanır. Şekil 26’ da gösterilen deltoidi inceleyelim. Deltoidin alanı ΔACD ve ΔABC üçgenlerin alanlarının toplamına eşittir. d_1 köşegeni ***iki*** üçgenin ortak kenarıdır. İki köşegenin kesişim noktasıyla, büyük köşegen, uzunlukları x ve y olan iki doğru parçaya ayrılmıştır.



Şekil 26.

Deltoidin köşegenleri birbirine dik olduğuna göre, x ve y doğru parçaları ΔACD ve ΔABC üçgenlerin $\overline{AC}$ kenarına karşılık gelen yükseklikleri olacaktır. Bu üçgenlerin her birinin alanı:

$$P_{\Delta ACD} = \frac{d_1 \cdot x}{2} \qquad P_{\Delta ABC} = \frac{d_1 \cdot y}{2}$$

olduğuna göre, onların toplamıyla deltoidin alanı elde edilir:

$$P = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta ABC} = \frac{d_1 \cdot x}{2} + \frac{d_1 \cdot y}{2} = \frac{d_1(x+y)}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Eşkenar dörtgende de köşegenler birbirine eşit olduğunu hatırlayalım ve bu son formülü, eşkenar dörtgenin alanının hesaplanmasında da kullanacağız.

Örnek 7 Kenarları 8cm ve 5cm ve köşegenleri 6cm ve 9cm olan deltoidin çevresini ve alanını hesaplayınız.

Deltoidin çevresi: $L = 2a + 2b = 16 + 10 = 26$ cm dir.

Deltoidin alanı: $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ cm^2 dir.

2 Bir deltoidin kenarları $2\sqrt{13}$ ve $2\sqrt{5}$ cm, deltoidin simetri ekseni olmayan köşegeni ise 8cm dir. Deltoidin alanını hesaplayınız.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Tabanı 34cm ve yüksekliği 15cm olan bir yamuğun alanı 360cm^2 dir. Yamuğun diğer tabanını hesaplayınız. Yamuğun orta tabanının uzunluğu ne kadardır?

2. Bir yamuğun alanı 75cm^2 ve yüksekliği 6cm dir. Yamuğun tabanlarının farkı 7cm olduğuna göre, tabanlarının uzunluklarını belirtiniz.

3. Bir dik yamuğun yan kenarları17cm ve 8cm ve çevresi 94cm dir. Yamuğun alanını hesaplayınız.

4. Tabanları 24cm ve 10cm ve yan kenarları 15cm ve 13cm olan yamuğun çevresini ve alanını hesaplayınız.

5. Nikola'nın avlusu, alanı 330m^2 ve tabanları 30m ve 14m olan ikizkenar yamuk biçimindedir. Nikola avlusunun etrafında bir defa yürüyerek kaç metre yol geçer?

6. Kenarları $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{BC} = 13$ cm, $\overline{CD} = 9$ cm, $\overline{AD} = 10$ cm ve köşegeni $\overline{AC} = 15$ cm olan yamuğun alanını hesaplayınız.

7. Kenarları 5cm ve 11cm ve küçük köşegeni 6cm olan deltoidin çevresini ve alanını hesaplayınız.

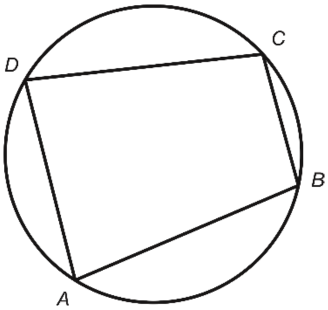
8. Semi, deltoit şeklinde alanı 840 m^2 olacak telden bir uçurtmayı yapmak istemiştir. Uçurtmanın küçük köşegeni 30cm ve küçük kenarı 25cm olmalıdır. Bu nedenle deltoidin kenarları için tel almalıdır. Telin uzunluğu ne kadar olmalıdır?

9. Lindita, kenarları 8cm ve 6cm olan ve eşit olmayan kenarları arasındaki açısı 150^0 olan deltoit şeklinde bir plakanın alanını hesaplıyor. Bu alan ne kadardır?

5. Kirişler ve Teğetler Dörtgeni

Kirişler ve teğetler dörtgeni önceki modüler birimde tanımlanmıştı. Şimdi bir daha bu tanımları hatırlayalım ve onların yeni özelliklerini öğrenelim.

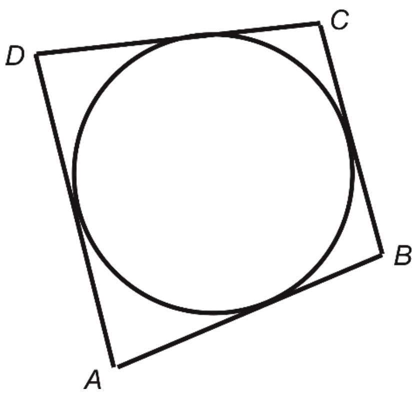
- Kenarları bir çemberin teğetleri olan dörtgene **teğetler dörtgeni** denir.
- Teğetler dörtgeninde karşıt kenarların uzunluklarının toplamı birbirine eşittir.



Şekil 27. Kirişler dörtgeni

$$\measuredangle A + \measuredangle C = 180^0 = \measuredangle B + \measuredangle D$$

- Kenarları bir çemberin teğetleri olan dörtgene **teğetler dörtgeni** denir.
- Teğetler dörtgeninde karşıt kenarların uzunluklarının toplamı birbirine eşittir.



Şekil 28. Teğetler dörtgeni

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

Kirişler dörtgenini incelerken, kirişleri bir dörtgenin kenarları olan çember, o dörtgenin etrafında çizilmiş olan **çevrel çemberi** olduğunu kaydedelim.

Teğetler dörtgenini incelerken, teğetleri bir dörtgenin kenarları olan çember, o dörtgenin **içten teğet çemberidir**.

Örnek 1

Kenarları $\overline{AB}=17cm$ ve $\overline{CD}=26cm$ olan $ABCD$ teğetler dörtgeninin çevresini hesaplayınız.

$$L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$$
$$\overline{AB}+\overline{CD}=17+26=43cm$$

Dörtgen, teğetler dörtgeni olduğuna göre $\overline{BC}+\overline{AD}=43cm$dir, dolayısıyla çevresi $L=86cm$ dir.

Örnek 2

Şimdiye dek incelenen dörtgenlerden (kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgen, romboit) hangileri teğetler ya da kirişler dörtgeni olduğunu doğrulayınız.

Kare, karşıt açıları bütünleyen olan dörtgendir, karşıt kenarların toplamı da birbirine eşittir. O halde kare hem **teğetler dörtgeni** hem de **kirişler dörtgenidir**, yani karede hem içten teğet hem de çevrel çember çizilebilir. İçten teğet ve çevrel çemberlerin merkezleri karede çakışıktır ve köşegenlerinin kesişim noktasında bulunuyorlar. Bu ise demektir ki, karenin köşegeni, çemberin çapıdır ve içten teğet çemberin çapı karenin kenarıdır.

Dikdörtgen, etrafında çevrel çember çizilebilen dörtgendir, yani dikdörtgen **kirişler dörtgeni** olabilir. Dikdörtgende karşıt kenarlarının toplamı eşittir özelliğine sahip değildir. O halde dikdörtgen teğetler dörtgeni değildir, dolayısıyla ona içten teğet çember çizilemez. Dikdörtgen etrafında çizilen çevrel çemberin merkezi köşegenlerin kesişim noktasındadır. Köşegen, çevrel çemberin çapıdır.

Eşkenar dörtgende içten teğet çember çizilebilir, fakat eşkenar dörtgen etrafında çevrel çember çizilemez. Demek ki, eşkenar dörtgen **teğetler dörtgeni** olabilir fakat kirişler dörtgeni olamaz. İçten teğet çemberin merkezi köşegenlerin kesişim noktasındadır, çemberin çapı ise eşkenar dörtgenin kenarına eşittir.

romboit, teğetler ve kirişler dörtgenlerinden hiçbiri değildir (şunu fark edelim: romboidin karşıt açıları eşittir fakat bütünleyen açılar değiller; aynı şekilde karşıt kenarların toplamları birbirine eşit değildir).

Her **yamuk** kirişler dörtgeni veya teğetler dörtgeni olmayabilir. Fakat etrafında çevrel çemberi çizilebilen yamuklar ve içten teğet çemberi çizilen yamuklar da vardır, yani kirişler ve teğetler dörtgeni olan yamuklar vardır.

Deltoit, içine içten teğet çemberi çizilebilen, fakat dıştan çevrel çember çizilemeyen dörtgendir. Aslında deltoit teğetler dörtgenidir, fakat kirişler dörtgeni değildir. Deltoidin komşu kenarları ikişer ikişer eşit olduğuna göre, onun karşıt kenarlarının toplamı birbirine eşit olacaktır.

Örnek 3 Çevresi 184cm olan bir dikdörtgenin kenarları 15:8 oranındadır. Dikdörtgen etrafında çizilen çevrel çemberin yarıçapını hesaplayınız.

$$a:b=15:8 \quad \Rightarrow \quad 8a=15b \quad \Rightarrow \quad a=\frac{15}{8}b$$

$$L=2a+2b \quad \Rightarrow \quad 184=2a+2b \quad \Rightarrow \quad a+b=92$$

$$\frac{15}{8}b+b=92\,/\cdot 8$$

$$15b+8b=92\cdot 8$$

$$b=\frac{92\cdot 8}{23}=32$$

$$a=\frac{15}{8}\cdot 32=60$$

Dikdörtgenin etrafında çizilen çevrel çemberin çapı, dikdörtgenin köşegeni ile eşittir. Pisagor teoremini kullanarak köşegeni hesaplayacağız.

$$d^2=a^2+b^2$$

$$d^2=60^2+32^2$$

$$d=68.$$

Dikdörtgen etrafında çizilen çevrel çemberinin yarıçapı $R=34$cm dir.

Örnek 4 Yarıçapı 6cm olan bir çemberde, köşeleri çember üzerinde olacak şekilde kare çizilmiştir, karede ise içten teğet olan ikinci çember çiziliyor. İçten teğet çemberin yarıçapını hesaplayınız.

Yarıçapı 6cm olan çember, karenin çevrel çemberidir ve onun çapı karenin köşegenidir (bir taslak çizim yapınız), yani karenin köşegeni $d = 12\ cm$ dir.

Kare içinde içten teğet olan çemberin çapı, karenin kenarı a ile eşittir.

Pisagor teoremi gereğince, karenin köşegeni ve kenarı arasında şu eşitlik geçerlidir:

$$d^2=2a^2 \quad \Rightarrow \quad d=a\sqrt{2}$$

$$12=a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a=6\sqrt{2}$$

$$r=3\sqrt{2}.$$

1 Alanı **600**cm^2 ve köşegenlerinin oranı $d_1 : d_2 = 3 : 4$ olan eşkenar dörtgenin kenarını ve içten teğet çemberinin yarıçapını hesaplayınız.

2 Tabanları 14cm ve 2cm, yan kenarı 10cm olan ikizkenar yamuğun çevrel dairesinin alanını hesaplayınız.

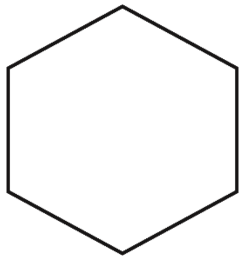
Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Çember içinde köşeleri çember üzerinde olan ve kenarları 15cm ve 5cm olmak üzere dikdörtgen çizilmiştir. Bu çembere dıştan teğet olarak çizilen karenin çevresini ve alanını hesaplayınız.
2. Yarıçapı 6cm olan bir çemberde, köşeleri çember üzerinde olmak üzere kare çizilmiştir. Karenin çevresini ve alanını hesaplayınız. Kare içinde içten teğet olan çemberin yarıçapı ne kadardır?
3. Kenarı 14cm olan eşkenar dörtgen içinde içten teğet olan çemberde, köşeleri çember üzerinde olmak üzere bir kenarı 6cm olan dikdörtgen çizilmiştir. Dikdörtgenin köşegenini ve alanını hesaplayınız.
4. Bir eşkenar dörtgenin kenarları, yarıçapı 5cm olan çemberin teğetleridir. Bu şekilde elde edilen teğetler dörtgeninin köşegenleri 3:4 oranında olduğuna göre, alanını hesaplayınız.
5. Tabanları 14cm ve 2cm ve yan kenarı 10cm olan ikizkenar yamuk etrafında çevrel çember olarak çizilen çemberin yarıçapını ondan sonra alanını da hesaplayınız.
6. Tabanları 15cm ve 9cm yamuk içinde içten teğet çember çizilmiştir. Yamuğun çevresini hesaplayınız.
7. Stefan bir çember çizmiş ve içinde köşeleri çember üzerinde olmak üzere, kenarı 9cm olan eşkenar üçgen çizmiştir. Ondan sonra aynı çember içinde köşeleri çember üzerinde olan karenin alanını hesaplamış. Karenin alanı ne kadarmış?

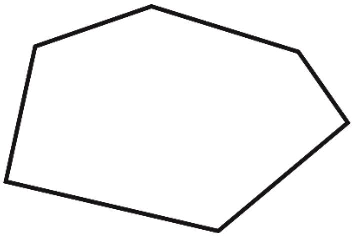
6. Düzgün Çokgenin Alanı ve Çevresi

❖ Tüm kenarları ve açıları eşit olan çokgene **düzgün çokgen** denir.

Örnek 1 Eşkenar üçgen bir düzgün çokgendir (düzgün üçgen). Kare, düzgün çokgendir. Şekil 29'da çizilen çokgen, düzgün altıgendir, Şekil 30'da ise çizilen çokgen, düzgün çokgen değildir.



Şekil 29.



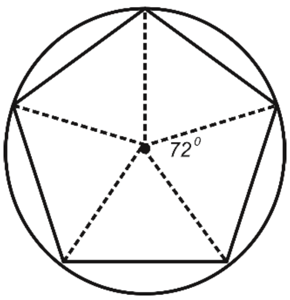
Şekil 30.

❖ Kenarı a olan düzgün bir n-gon'un çevresi hesaplanır formül ile $L = n \cdot a$ dir.

Niçin?

- Kenarı a olan eşkenar üçgenin çevresi L= $3a$ dır.
- Kenarı a olan karenin çevresi L= $4a$ dır.
- Düzgün n -genin, a uzunluğunda eşit n -kenarı vardır ve tüm kenarlarının uzunlukları toplamı $L = n \cdot a$ dır.

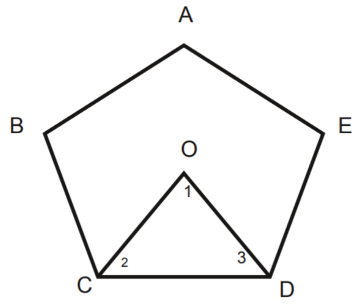
Bir düzgün beşgenin nasıl çizildiğini gösterelim (şekil 31): Bir daire içinde $360^0/5 = 72^0$ merkez açılı 5 eşit açı çiziyoruz. Bu açıların kenarlarının çemberi kestiği noktaları birleştirmekle, 5 kenarı olan çokgen elde etmiş oluyoruz, yani düzgün beşgen. Şekil 31'de düzgün beşgeni ayıran beş tane üçgen, ikizkenar üçgenlerdir ve hepsi birbiriyle eştir (çemberin yarıçapları gibi ikişer kenarı eşit ve o kenarlar arasındaki açıları eşittirler). Dolayısıyla çizilen beşgenin tüm kenarları birbirine eşittir, yani düzgün beşgendir.



Şekil 31. Düzgün beşgen

Çemberde merkez açı gibi çizilen ve ölçüsü 72^0 olan her açıya, **çokgenin merkez açısı** denir.

Şekil 32'de çizilen $ABCDE$ beşgeni, düzgün beşgendir. $\measuredangle 1$ merkez açısı 72^0 dir.



Şekil 32. Düzgün beşgen

- Genel olarak nasıl sonuca varabilirsiniz?

!

❖ Düzgün n -genin merkez açısı α, şu formülü kullanarak hesaplanır:

$$\alpha = \frac{360^0}{n}$$

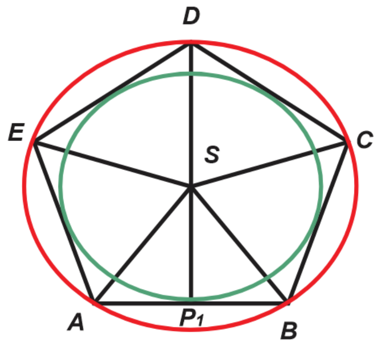
Düzgün çokgenler için şu özellikler geçerlidir:

❖ Her düzgün çokgen etrafında çevrel çember çizilebilir.

❖ Her düzgün çokgen içinde, içten teğet çember çizilebilir.

❖ Her düzgün çokgenin çevrel çemberinin ve içten teğet çemberinin merkezleri çakışıktır, yani aynı bir S noktasıdır ve buna **düzgün çokgenin merkezi** denir.

❖ Düzgün çokgenin merkezi, düzgün çokgenin merkez açısının köşesidir.



Şekil 33. Düzgün çokgenin içten teğet ve çevrel çemberi

Şekil 33'te görüldüğü gibi düzgün beşgen $\Delta ABS, \Delta BCS, \Delta CDS, \Delta DES, \Delta EAS$ olmak üzere beş eş üçgene ayrılmıştır. Bu üçgenler nasıldır? Düzgün beşgenin merkez açısı 72^0 ise, her üçgende diğer iki açı ne kadardır?

• ΔABS üçgenini inceleyelim. Bu üçgen ikizkenardır.

Bu üçgen ikizkenardır, çünkü kenarları için $\overline{AS} = \overline{BS} = R$ geçerlidir; burada R, düzgün beşgenin çevrel çemberinin yarıçapıdır. Demek ki, $\overline{AS}, \overline{BS}$ kenarları ΔABS üçgeninin yan kenarlarıdır, AB kenarı ise ΔABS üçgenini tabanıdır.

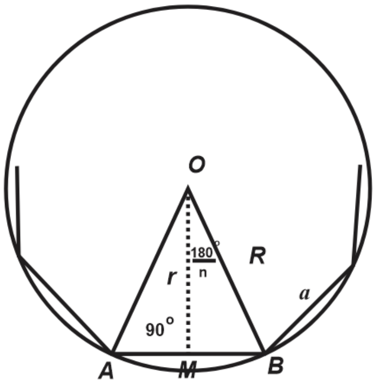
ΔABS üçgenine **düzgün beşgenin karakteristik üçgenidir** denir.

1 Düzgün altıgen çiziniz ve onun karakteristik üçgenini inceleyiniz.

2 Düzgün sekizgen çiziniz ve onun karakteristik üçgenini inceleyiniz.

!

❖ Düzgün n -genin **karakteristik üçgeni** ikizkenar üçgendir ve üçgenin kenarları için, $\overline{AO} = \overline{BO} = R$ geçerlidir; burada O noktası çevrel çemberin merkezidir, yani üçgenin yan kenarları çevrel çemberin yarıçapı R ile aynı uzunluktadır. ikizkenar üçgenin tabanına karşılık gelen yüksekliği (apotem) $\overline{OM} = r$ dir, yani uzunluğu içten teğet çemberin yarıçapı r ile eşittir.



Şekil 34. Karakteristik üçgen

- ABC üçgeninin alanı, bir kenar ve o kenara karşılık gelen yüksekliğin çarpımının yarısı olarak hesaplanır: $P_{\Delta ABC} = \dfrac{ah_a}{2}$.

Bir düzgün n -gen, n tane eş üçgene (karakteristik üçgenler) ayırabildiğini göz önüne bulundurarak, düzgün n -genin alanı için şu formül geçerli olacaktır:

$$P_{n-gen} = n \cdot \frac{ah}{2}.$$

Düzgün n -genin çevresi $L = na$ formülüyle hesaplandığını artık biliyorsunuz. Buradan düzgün n -genin alanı şu formülle de hesaplanabildiğini gösterebiliriz:

$$P_{n\text{-}gen} = \frac{L \cdot h}{2}$$

burada h, karakteristik üçgenin tabanına karşılık gelen yüksekliktir. Bu yüksekliğe karakteristik üçgenin **karakteristiği** denir.

Örnek 2 Kenarı $a = 3cm$ ve içten teğet çemberinin yarıçapı $r = 4cm$ verilmiş olan düzgün on iki genin çevresini ve alanını hesaplayınız.

Düzgün n -genin çevresi $L = na$ formülüyle hesaplanır. Düzgün on iki gende n = 12 olduğuna göre

$$L = 12{=}336cm \text{ dir.}$$

Alanı için $P_{n-gen} = \frac{L \cdot h}{2}$, formülünü alırsak şunu elde edeceğiz:

$r = h$ olduğunu göz önünde bulundurarak $P_{n-gen} = \frac{L \cdot h}{2}$ formülünden şu çözüm elde edilir:

$$P = \frac{36 \cdot 4}{2} = 72\,cm^2.$$

Örnek 3 Yarıçapı R = 5cm olan bir çember veriliyor. Köşeleri verilen çember üzerinde olacak şekilde çizilen düzgün altıgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

Düzgün altıgen söz konusu olunca, ona ait karakteristik üçgen eşkenardır: $360^0 : 6 = 60^0$. Bu çember altıgenin çevrel çemberidir, o halde karakteristik üçgenin yan kenarları, çemberin yarıçaplarıdır, yani R = 5cm. Düzgün altıgenin karakteristik üçgeni eşkenardır, dolayısıyla kenarlarının uzunluğu a = 5cm dir.

Düzgün altıgenin çevresi: L = 6 . 5cm = 30cm dir.

Düzgün altıgenin alanını hesaplamak için, apotemin uzunluğunu hesaplamamız gerekir. Burada apotem eşkenar üçgenin yüksekliği olduğuna göre, uzunluğu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ formülüyle hesaplanır. Bu durumda apotem $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ dir. O halde düzgün altıgenin alanı $P = \frac{30 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{150\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2 = \frac{75\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$ olduğunu buluyoruz.

Örnek 4 Bir düzgün sekizgenin çevrel çemberinin yarıçapı R = 10cm, içten teğet çemberinin yarıçapı ise r = 6 cm dir. Düzgün altıgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

İçten teğet çemberinin yarıçapı 6cm olduğuna göre, düzgün sekizgenin apotemi $h = r$ = 6cm dir.

Pisagor teoremi gereğince:

$$\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\text{cm}.$$

$$a=16\,\text{cm}.$$

elde edilir. Oradan da çevre için $L=8\cdot 16=128\text{cm}$.

Alanı $P=\dfrac{128\cdot 6}{2}=384\,\text{cm}^2$ olduğunu buluyoruz.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Kenarı a = 3cm ve içten teğet çemberinin yarıçapı r = 4cm verilmiş olan düzgün yedigenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

2. Petre'ye bir ödev veriliyor: Bir on bir genin çevrel çemberinin yarıçapı R = 5cm, içten teğet çemberinin yarıçapı r = 3cm olduğuna göre, alanı ve çevresi hesaplayınız. Petre ödevi çözmeye uğraşmış fakat çözememiş. Ona yardım ediniz!

3. Yarıçapı 10cm olan bir çember veriliyor. Bunun içinde köşeleri çember üzerinde olacak şekilde çizilen düzgün altıgenin alanını ve çevresini hesaplayınız.

4. Düzgün dokuzgenin merkez açısını, iç ve dış açılarını hesaplayınız.

5. Vildan, alanı $54\sqrt{3}$ cm^2 olan düzgün altıgen çiziyor. Bu düzgün altıgeni çizmek için onun kenarının uzunluğunu belirtmelidir. Düzgün altıgenin kenarının uzunluğu ne kadardır? Çevrel ve içten teğet çemberinin yarıçapını hesaplayınız!

7. Dairenin Çevresi ve Alanı

Çember ve daire kavramını önceden tanıyorsunuz.

Düşününüz ve cevaplayınız:

- Çember nedir, daire nedir?
- Çemberin uzunluğunu, doğru parçasının uzunluğunu ölçtüğün gibi cetvel kullanarak ölçebilir misin?

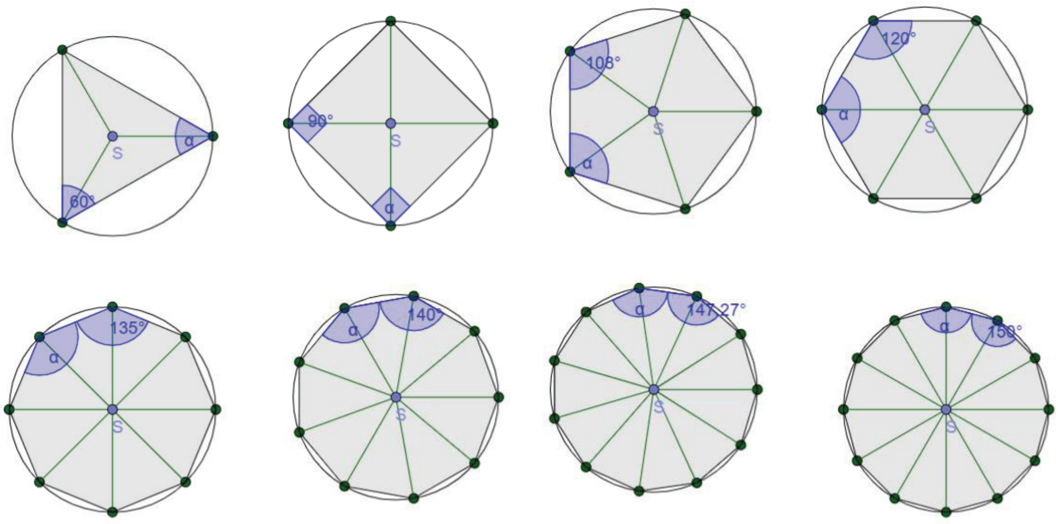
- Yarıçapı r olan çemberin çevresini hesaplamak için formül $L = 2r\pi$ dir.

  Çemberin çapı $d = 2r$ olduğunu göz önünde bulundurarak, çemberin çevresine ait formülü $L = d\pi$ biçiminde yazabiliriz.

- Yarıçapı r olan çemberin alanını hesaplamak için formül P $= r^2\pi$ dir.

Düzgün çokgenin çevresi ve alanıyla, dairenin çevresi ve alanıyla herhangi bir ilişki kurabilir miyiz?

Kenar sayısının artması için birkaç düzgün çokgen çizelim.



Şekil 35. Düzgün çokgenler

- Düzgün çokgenin kenar sayısının artmasıyla, çokgen gittikçe çembere yaklaşıyor.
- Düzgün çokgenin kenar sayısının artmasıyla, düzgün çokgenin kenarları gittikçe küçülüyor, fakat karakteristik üçgenin apotemi büyüyor ve gittikçe çemberin yarıçapının uzunluğuna yaklaşıyor.
- Düzgün çokgenin kenar sayısının artmasıyla, düzgün çokgenin çevresi gittikçe çemberin çevresine yaklaşıyor.
- Düzgün çokgenin kenar sayısının artmasıyla, düzgün çokgenin alanı, gittikçe çemberin alanına yaklaşıyor.

k (O, r) ve $k'(O', r')$ çemberleri verilmiş olsun.

!

❖ Dairenin alanı ve çapı arasındaki orantı sabittir ve bu sabit sayı nın değeri $\pi \approx 3{,}14$ tür.

❖ İki çemberin çevrelerinin oranı, yarıçapların oranı ile aynıdır, yani
$$\frac{P'}{P}=\frac{2r'\pi}{2r\pi}=\frac{r'}{r}.$$

❖ İki dairenin alanlarının oranı, yarıçaplarının kareleriyle oranı aynıdır, yani
$$\frac{S'}{S}=\frac{(r')^2\pi}{r^2\pi}=\frac{(r')^2}{r^2}.$$

Örnek 1 Çapı $d = 8$cm olan dairenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

Dairenin çapı 8cm olduğuna göre, Çevresi L $= 8\pi$cm olacaktır.

Dairenin alanını hesaplamak için, önce onun yarıçapını hesaplamalıyız: $r=\frac{d}{2}=\frac{8}{2}\text{cm}=4\,\text{cm}$. O halde, P = 16□ cm^2 dir.

Örnek 2 Alanı $P=100\pi\,cm^2$ olan dairenin çevresini hesaplayınız.

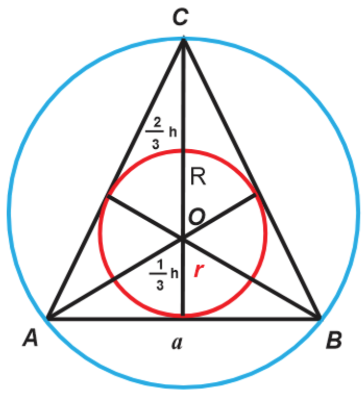
Dairenin alanı $P=100\pi\,cm^2$ olduğuna göre, $P=r^2\pi$ formülünden

$$100\pi=r^2\pi\Rightarrow r^2=100\Rightarrow r=10\,\text{cm}.$$

$$L=20\pi\ \text{cm}\ \text{elde edilir.}$$

Örnek 3 Kenarı $a=6$ olan eşkenar üçgenin içten teğet ve çevrel çemberlerinin çevresini ve alanını hesaplayınız.

Eşkenar üçgen çizdikten sonra içinde içten teğet çemberini ve çevrel çemberini çizelim.



Şekil 36. Eşkenar üçgenin içten teğet ve çevrel çemberi

Eşkenar üçgende Pisagor teoremini kullanmakla yamuk etrafında çizilen çevrel çemberin yarıçapı $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ dir ve içten teğet çemberinin yarıçapı ise $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$ cm dir.

Buna göre çevreler için, şunu elde ediyoruz:

$$L_{içten\ teğet}=2r\pi=2\sqrt{3}\pi\ \text{cm}.$$

$$L_{çevrel\,ç.}=2R\pi=2\cdot2\sqrt{3}\pi\ \text{cm}=4\sqrt{3}\pi\ \text{cm}.$$

Alanlarının oranı ise:

$$P_{içten\ teğet}=r^2\pi=3\pi\ \text{cm}^2.$$

$$P_{çevrel\,ç.}=R^2\pi=12\pi\ \text{cm}^2.$$

Örnek 4 Bir dairenin çevresi ve alanının ölçü sayıları eşittir. Yarıçapı ne kadardır?

Bir dairenin çevresi ve alanının ölçü sayıları eşit ise,

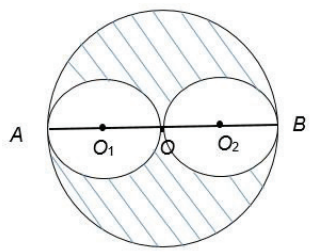
$$L = P$$
$$2r\pi = r^2\pi \,/ : \pi$$
$$2r = r^2 \,/ : r$$
$$r = 2$$

elde edilir.

1 İki çemberin çevrelerinin toplamı 28π cm, yarıçaplarının farkı ise 4cm dir. Dairelerin alanını hesaplayınız!

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Alanı, yarıçapları 3cm ve 4cm olan iki dairenin alanlarının toplamına eşit olan dairenin çevresini hesaplayınız.
2. Köşegeni 10cm olan kare veriliyor. Kare nin içinde ve dışında çizilen içten teğet ve çevrel çemberlerin çevrelerini, ondan sonra bu çemberlerle belirlenen dairelerin alanlarını hesaplayınız.
3. Yarıçapları 2 : 3 oranında olan iki çember veriliyor. Onların çevrelerinin oranı nasıldır? alanlarının oranı ise nasıldır?
4. Bir çemberin yarıçapı 3cm dir. Verilen bu çemberin ve diğer bir çemberin alanlarının oranı 9:16 dır. Diğer çemberin yarıçapını hesaplayınız.
5. Bir dairenin alanı diğer bir dairenin alanından 4 defa büyüktür. Birinci dairenin yarıçapı, ikinci dairenin yarıçapından kaç defa büyüktür?
6. Arif ve Teuta şu verilere göre iki çember çizmiştir: Yarıçaplarının oranı 2:3 olmak üzere çizilen dairelerin alanlarının farkı 25πcm^2 olmalıdır. Arif ve Teuta'nın çizdikleri dairelerin her birinin çevresini ve alanını hesaplayınız.
7. Bir daire içinde köşeleri çember üzerinde olacak şekilde kenarı 9cm olan eşkenar üçgen çizilmiştir. Dairenin çevresini ve alanını hesaplayınız.
8. Mila bir çember çizmiş ve içinde köşeleri çember üzerinde olacak şekilde yarıçapı 9cm olan bir eşkenar üçgen çizmiş. Ondan sonra, aynı çemberde köşeleri çember üzerinde olan bir kare çizmiş. Çizilen karenin alanı ne kadardır?
9. Aşağıdaki şekilde $\overline{AO} = 10$cm ve $\overline{AO_1} = \overline{O_2B} = \frac{1}{2}\overline{AO}$ dir. Taralı kısmın alanını hesaplayınız.



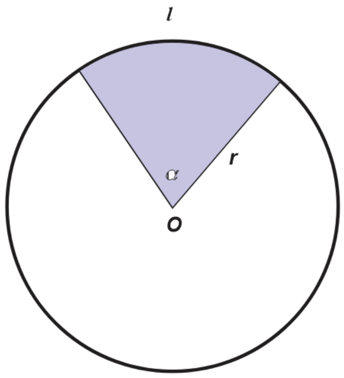
8. Dire Parçalarının Çevresi ve Alanı

8.1. Daire Yayının Uzunluğu

r yarıçaplı bir çemberi, merkez açısı 360^0 (tam açı) olan bir çemberin yayı olarak sayacağız. Çemberin uzunluğu $L = 2r\pi$ dir.

Buna göre, 1^0 merkez açı ya karşılık gelen yayın uzunluğu:

$$l = \frac{2r\pi}{360} \quad \text{yani} \quad l = \frac{r\pi}{180} \text{ dir.}$$



Şekil 37.

!

❖ r yarıçaplı bir çemberde merkez açısı a olan **çember yayının uzunluğu**

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}.$$

Örnek 1

Yarıçapı 17cm olan bir çembere ait olan, merkez açısı 54^0 ye karşılık gelen çember yayının uzunluğunu hesaplayınız.

Yukarıdaki formüle göre:

$$l = \frac{17\pi \cdot 54}{180} = 5{,}1\pi\, cm \text{ elde edilir.}$$

Örnek 2

Merkez açısı 36^0 olan bir çember yayının uzunluğu 14πcm dir. Bu yayın ait olduğu çemberin çevresi ne kadardır?

$l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ formülünde bilinmeyen r dir:

$$14\pi = \frac{r\pi 36}{180} \quad \Rightarrow \quad 14 = \frac{r}{5} \quad \Rightarrow \quad r = 70$$

$$L = 2r\pi = 140\pi\, cm$$

Örnek 3 Yarıçapı 24cm olan çembere ait, bir çember yayının merkez açısı $24^0 24'$ dir. Çember yayının uzunluğunu hesaplayınız.

Önce açının büyüklüğünü derecelerle ifade etmeliyiz (dakikaları derecelere çevirmeliyiz).

$$\alpha = 24^0 24'$$

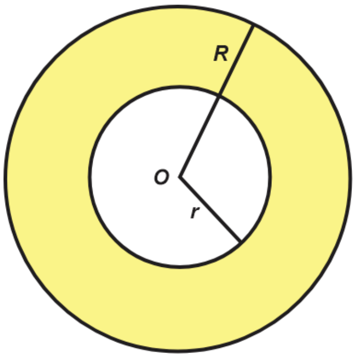
$$24' = \left(\frac{24}{60}\right)^0 = 0,4^0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 24,4^0$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{24\pi \cdot 24,4}{180} = 3,25\pi\, cm$$

1 Yarıçapı 16cm olan çembere ait, bir çember yayının merkez açısı $46^0 25'$ dir. Çember yayının uzunluğunu hesaplayınız.

8.2. Daire Halkasının (yüzüğünün) Alanı

❖ İki merkezil çemberle sınırlanan düzlemin parçasına daire halkası denir (şekil 38).



Şekil 38. Daire yüzüğü

!

❖ **Daire halkasının alanı**, daire yüzüğünü sınırlayan iki dairenin alanlarının farkına eşittir. Çemberlerin yarıçaplarını R ve r ile işaret edersek, daire yüzüğünün alanı:

$$P = R^2\pi - r^2\pi.$$

❖ olacaktır**.** $R - r$ farkı**, daire halkasının genişliğidir**.

Örnek 4 Yarıçapları 12cm ve 9cm olan iki merkezil çemberin oluşturduğu daire halkasının alanını hesaplayınız. Daire halkasının genişliği ne kadardır?

$$P = R^2\pi - r^2\pi = 144\pi - 81\pi$$
$$P = 63\pi cm^2$$

Daire halkasının genişliği 12cm – 9cm = 3cm dir.

Örnek 5 Bir daire halkasının alanı $95\pi cm^2$, yüzüğü oluşturan küçük çemberin yarıçapı ise 7cm dir. Daire halkasının genişliğini hesaplayınız.

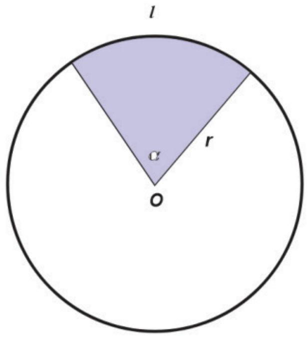
Yarıçapı r = 7cm olan daire halkasının (küçük daire) alanı P = $49\pi cm^2$ dir. Dolayısıyla, büyük dairenin alanı $(95 + 49)\ \pi cm^2$, yani $144\pi cm^2$ dir. O halde büyük dairenin yarıçapı 12cm dir.

Daire halkasının genişliği 5cm dir.

2 Bir daire halkasının alanı $55\pi cm^2$ ve ona ait olan büyük dairenin çevresi $16\pi cm$ dir. Daire halkasının genişliğini ne kadardır?

8.3. Daire Diliminin Alanı

❖ Ölçüsü α olan bir merkez açının kenarları ve ona karşılık gelen yay ile sınırlanan daire parçasına **daire dilimi** denir.



Şekil 39. Daire dilimi

Uyarı: Şekil 39 da iki daire dilimi olduğunu fark edebilirsiniz, dairenin boyalı ve boyasız kısımları.

Daire dilimi 1^0 merkez açısı ile sınırlandığı durumda onun alanı P = $r^2\pi/360$ dir.

❖ α merkez açısı ile sınırlanan daire diliminin alanı:

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}.$$

Örnek 6 Yarıçapı $r = 8$cm olan çemberde, α = $27^0 20'$ merkez açısıyla sınırlanan daire diliminin alanını hesaplayınız.

$$\alpha = 27^0 20' = \left(27 + \frac{20}{60}\right)^0 = 27,3^0$$

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{64\pi \cdot 27,3}{360} = 4,85\pi$$

Örnek 7 Yarıçapı 11cm olan çembere ait daire diliminin alanı 62,8cm^2 dir. Daire dilimine karşılık gelen merkez açı ne kadardır? Daire dilimine karşılık gelen yayın uzunluğu ne kadardır?

$$r = 11cm \qquad P = 62,8cm^2$$

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} \quad \Rightarrow \quad 62,8 = \frac{121 \cdot 3,14 \cdot \alpha}{360}$$

$$62,8 = \frac{121 \cdot 3,14 \cdot \alpha}{360}$$

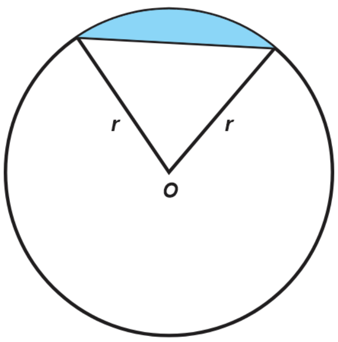
$$\alpha = \frac{360 \cdot 62,8}{121 \cdot 3,14} = 59,5^0$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{11\pi \cdot 59,5}{180} = 11,42cm$$

3 Yarıçapı 7cm ve merkez açısı 55^{0}26' olan daire diliminin alanını hesaplayınız. Bu merkez açıya karşılık gelen yayın uzunluğu ne kadardır?

8.4. Daire Kesmesinin Alanı

❖ Bir kirişin sınırladığı yay ile kiriş arasında kalan bölgeye **daire kesmesi** denir.



Şekil 40. Daire kesmesi

Uyarı: Şekil 40 da iki daire kesmesi olduğunu fark edebilirsiniz, dairenin boyalı ve boyasız kısımları.

> ❖ **Daire kesmesinin alanı**, a merkez açısına karşılık gelen daire diliminin alanından karşılığında olan üçgenin alanı çıkarılır, Burada adı geçen üçgen ikizkenar olarak yan kenarları dairenin yarıçapı r, üçüncü kenarı ise daire kesmesine ait kiriştir.

Örnek 8 Yarıçapı r = 10cm olan çemberde α = 73⁰45'merkez açısına karşılık gelen kirişin uzunluğu 16cm dir. Elde edilen daire kesmesinin alanını hesaplayınız.

İkizkenar üçgenin yan kenarı 10cm, tabanı ise 16cm dir. Üçgenin yüksekliğini Pisagor teoremi yardımıyla belirteceğiz:

$$h^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad h = 6$$

Üçgenin alanı: $$P_\Delta = \frac{16 \cdot 6}{2} = 48$$

Daire diliminin alanı: $$P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360}; \qquad \alpha = 73^0 45' = 73,75^0 .$$

$$P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360} = \frac{100\pi \cdot 73,75}{360} = 64,33 \text{ dir.}$$

Daire kesmesinin alanı: 64,33 – 48 = 16,33cm^2 elde edilir.

4 Kenarı 45cm olan eşkenar üçgen etrafında çevrel çember çizilmiştir. Üçgenin bir kenarı ve o kenarın ayırdığı yay ile sınırlanan daire kesmesinin alanını hesaplayınız.

Kendi başına çalışma alıştırmaları:

1. Merkez açısı 45^0 olan bir yay, yarıçapı 17cm olan bir çembere aittir. Yayın uzunluğunu hesaplayınız.

2. Merkez açısı $46^0$15'ya karşılık gelen bir yay, yarıçapı 12cm olan bir çembere aittir. Yayın uzunluğunu hesaplayınız.

3. Uzunluğu 5,5cm olan bir yay yarıçapı 3,4cm olan bir çembere aittir. Bu çember yayı kaç dereceli merkez açıya karşılık gelir?

4. Bir daire halkasının alanı 40πcm^2 dir. Onun küçük dairesinin çevresi 6πcm dir. Daire halkasının genişliğini hesaplayınız.

5. Genişliği 6cm olan bir daire halkasının alanı 120πcm^2 dir. Daire halkasını oluşturan çemberlerin yarıçaplarını belirtiniz.

6. Silindir biçiminde bir bardağın dibine ait dış dairenin çevresi 10πcm, dibinin alanı ise $4,75\pi$cm^2 dir. Bardağın kalınlığı ne kadardır?

7. Yarıçapı 12 cm olan bir dairede, 45^0 merkez açıya karşılık gelen daire diliminin alanını hesaplayınız.

8. Yarıçapı 12 cm olan bir dairede, $46^0$12' merkez açıya karşılık gelen daire diliminin alanını hesaplayınız.

9. 64^0 merkez açıya karşılık gelen daire diliminin alanı $\frac{1568\pi}{45} cm^2$ olduğuna göre, daire diliminin ait olduğu dairenin yarıçapını ve alanını hesaplayınız.

10. Yarıçapı 8cm olan bir çemberde alanı 26 πcm^2 olan bir daire dilimi veriliyor. Daire dilimine karşılık gelen merkez açıyı hesaplayınız.

11. Yarıçapı 9 cm olan bir dairede 60^0 merkez açıya karşılık gelen daire kesmesinin alanını hesaplayınız. (Burada daire kesmesi, o açıya karşılık gelen kiriş ile çember arasındaki bölgedir).

9. Modüler Birimin Tekrarlanmasına Ait Alıştırmalar

1. İki karenin çevrelerinin farkı 12 cm, alanlarının farkı ise 33 cm^2 dir. Her iki karenin kenarlarını ve köşegenlerini hesaplayınız.

2. Bir dikdörtgenin köşegeni 13 cm ve alanı 60 cm^2 dir. Dikdörtgenin çevresini hesaplayınız.

3. Bir paralelkenarın çevresi 48 cm dir. Bu paralelkenarın bir kenarı, diğer kenarın iki katı ve büyük kenarlar arsındaki uzaklığın üç katı olduğuna göre, alanını hesaplayınız.

4. Bir eşkenar dörtgenin kenarı 8 cm ve dar açısı 60^0 dir. Eşkenar dörtgenin alanını hesaplayınız.

5. Bir ikizkenar üçgenin çevresi 88 cm dir ve yan kenarı tabanından 4 cm küçüktür. Üçgenin kenarlarını ve alanını hesaplayınız.

6. Bir üçgende bir kenarın uzunluğu ve o kenara karşılık gelen yüksekliğin uzunlukları toplamı 18 cm dir. Bunun kenarı 4 cm artar, yüksekliği ise 4cm azalırsa üçgenin alanı 4 cm^2 artacaktır. Üçgenin kenarını ve yüksekliğini hesaplayınız.

7. Bir eşkenar üçgenin yüksekliği 9 cm dir. Üçgenin alanını hesaplayınız.

8. Bir yamuğun tabanları 142 cm ve 89 cm dir, köşegenleri ise 120 cm ve 153 cm dir. Yamuğun çevresini ve alanını hesaplayınız.

9. Köşegenleri 16 cm ve 12 cm olan bir eşkenar dörtgen veriliyor. Eşkenar dörtgenin içten teğet çemberinin çevresini hesaplayınız.

10. Çevresi, 6 cm ve 8 cm yarıçaplı çemberlerin çevrelerinin toplamına eşit olan çemberin yarıçapını hesaplayınız.

11. Çevresi, 6 cm ve 4 cm yarıçaplı dairelerin çevrelerinin toplamına eşit olan dairenin yarıçapını hesaplayınız.

Çözümler ve çözüm tavsiyeleri

Modüler birimi 1

1

1. b), ç).
2. a) Her iki doğruluk değeri alabilir, yani bazıları için kış en güzel mevsim, bazıları için ise en güzel değildir.
   b) doğruluğu sorgulanamaz;
   c) tümcenin anlamı yoktur;
   ç) doğruluğu sorgulanamaz;
3. a) doğru değildir
   b) doğrudur;
   c) doğru değildir.
   ç) doğrudur.

4.a). a) τ(Üsküp, Kuzey Makedonya cumhuriyetinin baş kentidir) = T
b). τ (3 = −3) =⊥
c). τ(24 sayısı 6 ile bölünür) = T
ç) $\tau(2<3)$ = T .

5.

x	-2	-1	1	2
$\tau(x<3)$	T	T	T	T
$\tau(x^2=4)$	T	⊥	⊥	T
$\tau(x+1>2)$	⊥	⊥	⊥	T

2

1.a) Bugün cumadır b) $-3<5$;
c) 10 negatif sayı değildir; ç) $\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$.

2. a) $\neg p$: Metre, uzunluk ölçü birimi değildir, $\tau(\neg p)=\perp$.
   b) $\neg q$: 9 sayısı 37'nin böleni değildir, $\tau(\neg q)$ =T.
   c) $\neg r: 2+7=9$, $\tau(\neg r)=$ T; г) $\neg s: 7\geq 3$, $\tau(\neg s)=$ T .
3. a) $p\wedge q$ = 5 doğal sayıdır ve $-2>3$;
   b) $p\wedge p$ = 5 doğal sayıdır ve 5 doğal sayıdır;
   c) $q\wedge r=-2>3$ ve $3|9$; ç) $r\wedge p=3|9$ ve 5 doğal sayıdır.

4.a) $\tau(p\wedge\neg q)=\perp$; b) $\tau(r\wedge\neg p)=$ T;

c) $\tau\left(\left(\neg p \wedge \neg r\right) \wedge q\right) = \perp$;   ç) $\tau\left(\neg\left(p \wedge q\right) \wedge r\right) = T$.

5. p: 5 sayısı asal sayıdır; q: 5 sayısı tek sayıdır.

6. a) $\tau(5 > 3 \wedge 3 | 18) = T$;   b) $\tau\left(3^2 = 6 \wedge 2^3 = 6\right) = \perp$;   c) $\tau\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \wedge \frac{1}{5} < \frac{1}{2}\right) = \perp$;

ç) $\tau($ -2 sayısı negatif sayıdır ve $\wedge -2 = 2) = \perp$.

7.a) $p \vee q = |-3| = -3$ ya da $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$;   b) $p \vee p = |-3| = -3$ ya da $|-3| = -3$;

c) $q \vee r = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ ya da $5 \geq 7$;   ç) $r \vee p = 5 \geq 7$ ya da $|-3| = -3$.

8. a) $\tau(p \vee \neg q) = T$;   b) $\tau(r \vee \neg p) = \perp$;   c) $\tau\left(\left(\neg p \vee \neg r\right) \vee q\right) = T$;

ç) $\tau\left(\neg\left(p \vee q\right) \vee r\right) = \perp$.

9.a) $\tau(5 | 25 \vee 2 \nmid 20) = T$;   b) $\tau(7 + 3 \neq 10 \vee 3 > -1) = T$;

c) $\tau\left(\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \vee 4^2 = 8\right) = T$;

ç) τ(Bir çokgenin alanı negatif sayıdır $\vee |-2| = 2) = T$.

10.

a) $\tau\left(\left(3 \neq 2 \wedge 2 < -1\right) \vee \left((36\right.\right.$ sayısı 6 ile bölünür$)) = T$

b)

$\tau\left(\left(\frac{5}{5} = 1 \vee 5 - 6 = 1\right) \wedge \left((\right.\right.$ Doğal sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile işaret edilir$)) = \perp$

c) $\tau\left(\left(10 = 5 \cdot 2 \wedge 6 > 6\right) \vee \neg\left(6^2 = 36\right)\right) = \perp$;

ç) $\tau\left(\neg\left(4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \vee -2 > 3\right) \wedge \left(x + 5 = 7 \text{ için } x=2\right)\right) = \perp$

11.

a)

$p \veebar q =$ ya paralelkenarın hiçbir çift paralel kenarı yoktur, ya da $14 \neq 2 \cdot 7$

b) $r \veebar r =$ ya $7 - 7 = 0$ ya da $7 - 7 = 0$;

c) $q \veebar r =$ ya $14 \neq 2 \cdot 7$ ya da $7 - 7 = 0$;

ç)

$r \veebar p =$ ya $7 - 7 = 0$ ya da paralelkenarın hiçbir çift paralel kenarı yoktur.

3

1. a); $p \Rightarrow q = \frac{1}{4} = 0{,}25$ ise, Tuna ırmağı Üsküp'ten geçer;
   b) $q \Rightarrow q =$ Tuna ırmağı Üsküp'ten geçerse,
   Tuna ırmağı Üsküp'ten geçer;
   c)
   $q \Rightarrow r =$ Tuna ırmağı Üsküp'ten geçerse, $\sqrt{2}$ irrasyonel sayıdır:
   ç) $r \Rightarrow p = \sqrt{2}$ irrasyonel sayı ise $\frac{1}{4} = 0{,}25$ dir.
2. a) $\tau(p \Rightarrow \neg q) = \text{T}$; b) $\tau(\neg p \Rightarrow r) = \text{T}$;
   c) .$\tau((\neg p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow q) = \perp$; ç) $\tau(\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = \text{T}$.
3. a) $\tau(3 > -2 \Rightarrow -2 < 1) = \text{T}$; b) $\tau(2 \neq 3 \Rightarrow -5 = 5) = \perp$;
   c) $\tau(2^6 = 12 \Rightarrow 7^2 = 14) = \text{T}$; ç) $\tau(2 + 0 = 2 \Rightarrow 2 - 0 = -2) = \perp$.
4. ç) eğer p o halde q işlemine gerektirim denir.
5 a) $\tau((\text{T} \wedge \perp) \vee \perp) = \perp$; b) $\tau(\neg(\text{T} \vee \text{T}) \wedge \perp) = \perp$;
   c) $\tau((\perp \wedge \text{T}) \Rightarrow \neg \perp) = \text{T}$; ç) $\tau((\perp \vee \perp) \Leftrightarrow (\neg \text{T} \wedge \neg \perp)) = \text{T}$.
6. a) $p \Leftrightarrow q = -1$ pozitif sayıdır, ancak ve ancak $4 > 2$
   b); $q \Leftrightarrow p = 4 > 2$ ancak ve ancak $4 > 2$
   c); $q \Leftrightarrow r = 4 > 2$ ancak ve ancak $2 \bullet 3 - 6 = 0$
   ç). $r \Leftrightarrow p = 2 \bullet 3 - 6 = 0$ ancak ve ancak –1 pozitif sayı ise.
7. a) $\tau(p \Leftrightarrow \neg q) = \perp$; b) $\tau(r \Leftrightarrow \neg p) = \perp$;
   c) $\tau((\neg p \Leftrightarrow \neg r) \vee q) = \text{T}$; ç) $\tau(\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow r) = \perp$.
8. a) $\tau(3 \mid 20 \Leftrightarrow 3 - 2 \cdot 1 = 1) = \perp$; b) $\tau\left(3 = 3 \Leftrightarrow 2 = \frac{6}{3}\right) = \text{T}$;
   c) $\tau(-2 > 2 \Leftrightarrow 6^2 = 12) = \text{T}$;
   ç)
   $\tau\left(\text{Boyutları } a \text{ ve } b \text{ olan dikdörtgenin alanı } a \cdot b \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\right) = \perp$.

9.
   a) $\tau(p \veebar \neg q) = \perp$; b) $\tau(r \veebar \neg p) = \perp$;
   c) $\tau((\neg p \veebar \neg r) \Rightarrow q) = \text{T}$; ç) $\tau(\neg(p \Leftrightarrow q) \veebar r) = \perp$.
10. a) $\tau((\text{T} \Leftrightarrow \text{T}) \wedge \perp) = \perp$;

b) $\tau\left(\neg(\perp \veebar \mathsf{T}) \Leftrightarrow \perp\right) = \perp$;

c) $\tau\left((\neg\mathsf{T} \Rightarrow \mathsf{T}) \vee \neg\perp\right) = \mathsf{T}$;

ç) $\tau\left((\perp \Leftrightarrow \mathsf{T}) \veebar (\neg\perp \Rightarrow \neg\mathsf{T})\right) = \perp$.

4

1.

a) $\tau\left(\neg p \wedge r \Leftrightarrow \neg(r \wedge q) \Rightarrow p\right) = \perp$;

b) $\tau\left((p \veebar \neg r) \Rightarrow \neg(q \Leftrightarrow p)\right) = \mathsf{T}$.

$\tau(p) = \perp$ için ; $\tau(q) = \mathsf{T}$; $\tau(r) = \perp$.

2.

a)

1) $\tau(p) = \mathsf{T}$ ise, $\tau(p \vee \mathsf{T}) = \mathsf{T}$.

2) $\tau(p) = \perp$ ise, $\tau(p \vee \mathsf{T}) = \mathsf{T}$.

b)

1) $\tau(p) = \mathsf{T}$ ise, $\tau\left(p \Rightarrow (\neg p \wedge \mathsf{T})\right) = \perp$.

2) $\tau(p) = \perp$ ise, $\tau\left(p \Rightarrow (\neg p \wedge \mathsf{T})\right) = \mathsf{T}$.

c)

1) $\tau(p) = \mathsf{T}$ ise, $\tau(p \Leftrightarrow \perp) = \perp$.

2) $\tau(p) = \perp$ ise, $\tau(p \Leftrightarrow \perp) = \mathsf{T}$.

ç)

1) $\tau(p) = \mathsf{T}$ ise, $\left((\mathsf{T} \Rightarrow p) \veebar \neg\mathsf{T}\right) = \mathsf{T}$.

2) $\tau(p) = \perp$ ise, $\tau\left((\mathsf{T} \Rightarrow p) \veebar \neg\mathsf{T}\right) = \perp$.

3.

a) $\neg(p \wedge q)$ ve $\neg p \vee \neg q$; b) $p \vee (p \wedge q)$ ve p.

$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
T	T
T	T
T	T
T	T

5

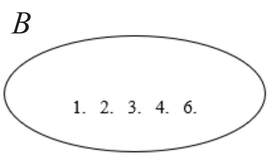
1. Tavsiye: Doğruluk değerler tablosundan yararlanınız.
2. Tavsiye: Doğruluk değerler tablosundan yararlanınız.

6

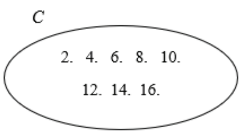
1.

a) A = T, E, K, N, I

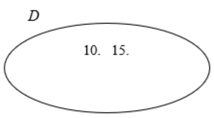
b) $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$,



c) $C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$,



ç) $D=\{10,\ 15\}$,



2.

ç) $\{3,\ 5,\ 8\}\subset A$.

3.

a) denktirler;
b) eşit ve denktirler.

4.

ç) $x=2,\ y=3$.

5.

a) $P(A)=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}$;

б) $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$.

7

1. a) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = B$; b) $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$;

   c) $(A \setminus B) \cup C$; ç) $A \cap (B \setminus C)$.

2. $A = \{a, b, c, d, e, i\}$, $B = \{d, e, f\}$, $C = \{a, , c, d, e, i, f, g, h, k\}$ ve $A \cap B = \{d, e\}$.

3. $\{1, 3\} = \{1, 3\}$.

4. a) $A \times B = \{(a,1), (a,b), (2,1), (2,b), (3,1), (3,b)\}$;

   b) $B \times A = \{(1,a), (1,2), (1,3), (b,a), (b,2), (b,3)\}$.

5. a) $A \cap B = \{-3\}$; b) $A \setminus B = \{-4, -2, -1\}$;

   c) $P(A \setminus B) = \{\varnothing, \{-4\}, \{-2\}, \{-1\}, \{-4,-2\}, \{-4,-1\}, \{-2,-1\}, \{-4,-2,-1\}\}$;

   ç) $B \setminus A = \{3\}$.

6. b) $C = \{x \mid x -$ çift sayıdır $\wedge\ x < 12\}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x - 5 = 0\}$.

7. a) $\overline{A} = \{*, \Delta, -5\}$; b) $\overline{C} = \{\Delta, 2, \pi, a\}$;

   c) $\overline{C} \cup \overline{B} = \{\Delta, 2, \pi, a\}$; ç) $\overline{(A \setminus B)} = \{*, \Delta, -5, \pi\}$.

8. a) $x = 3,\ y = 5$; b) $x = 2,\ y = \dfrac{1}{2}$.

9. $A = \{1, b, \pi\}$, $B = \{▭, a\}$.

10. a) $\varnothing \setminus A = \varnothing$; b) $A \cup (A \cap B) = A$.

8

1. a)
2. $M_1 = \{2,4,6,8,10,12,14\}$
3. a) T b) $\perp$ c) T.
4. a) T b) $\perp$ c) T.

9

1. b)
2.

x	-2	-1	0	1	2
$\tau(-2x+5=3)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$

3. a) $(2\cdot 2=5)\wedge(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0)$; b) $(2\cdot 2\neq 5)\Rightarrow(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0)$; c) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0)\Leftrightarrow(3\geq -2)$.

4. $\perp$

6. a), b) $\varnothing$

7. A={1,3,5}

8. $\{-2,\ \Delta,\ \theta\}$

9. *C*

Modüler birimi 2

1

1. a) E doğru; b) E yanlış; c) E doğru.
2. a); b); c).
3. a) 3•6; b) 9•4; c) 10•2.
4. a)25; b) 452; c)123.
5. a) 1000; b) 775; c) 900000; ç) 7000000.
6. a) 847; b) 517; c) 26; ç) 1038; d) 834.
7. 1209.
8. Zoran 3380 denar harcamış ve 8620 denarı kalmıştır..
9. 30 000 denar.
10. $750\cdot 408$ = 306000.

2

1. a) $D_{125}=\{1,5,25,125\}$; b) $D_{565}=\{1,5,113,656\}$; c) $D_{232}=\{1,2,4,8,29,58,116,232\}$.
2. a) $175=7\cdot 5^2$; b) $550=2\cdot 5^2\cdot 11$; c) $1250=2\cdot 5^4$.
3. a) $S_8=\{8,16,24,...\}$; b) $S_{16}=\{16,32,48,...\}$; в) $S_{23}=\{23,46,69,...\}$.
4. a) asal sayı; b) bileşik sayı; c) bileşik sayı
5. 3.
7. 6,72.
8. a) EBOB (42,20,30) = 2, EKOK (42,20,30) = 420; b) EBOB (12,18,25) = 2, EKOK (12,18,25) = 900.
9. Birbirine göre asaldır: b) ve c).
15. 585,180.
16. 3 metre
17. 360 saat ya da 15 gün.
18. 3 eşit paket.

3

1. a) yanlış b) doğru c) yanlış ç) yanlış d) doğru e) doğru f) yanlış

2. 1258, -987,8746,203, -1223; -1223<-987<203<1258<8746.

3. 1258,0,987,8746,203,1223; 0<203<987<1223<1258<8746.

4. a) + 68 b) + 90 c) -89 ç) -31 d) + 40 e) -36 f) + 7 g) -7.

5. a) -5 : (-1) + (-8) · (3-(-2) · 6) = -115 b) -7-(- 2) · (-1 + (-10): 2) = -19 c) (5 · (-2)-(-3)) · (-7) = -91

6. a) -1 b) 13.

9. 120.

10. En soğuk ilk gün en sıcak dördüncü gün olmuştur.

11. -1,0,1,2,3,4,5.

4

1. Her iki kısım günün $\frac{1}{2}$ 'idir.

2. a) 0; b) 2; c)-1, 1.

3. a) $\frac{40}{45}$ b) $\frac{14}{12}$ c) $\frac{9}{18}$.

4. $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$.

5. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{21}$.

6. a) $\frac{5}{12} < \frac{8}{9}$ b) $\frac{7}{6} > \frac{7}{9}$ c) $\frac{9}{17} > \frac{1}{2}$.

7. $-\frac{5}{12} < -\frac{2}{5} < \frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{5}{9} < \frac{8}{9}$.

8. $\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, 3, \frac{5}{2}, 5$.

5

1. a) $4\frac{1}{3}$ b) $\frac{47}{52}$ c) $1\frac{5}{13}$ ç) $2\frac{9}{10}$ d) $-\frac{6}{7}$ e) 1.

3. denar. Birincisi 7 000 denar, ikincisi ise 15 000 denar almıştır.

4. 30 öğrenci.

5. $\frac{1258}{3465}$

6. Onur'un planı imkansızdır.

7. 186 000 l,124 000 l,1395 kg.

8. $\frac{9}{11}$

6

1. 0,(6); 0,875; 1,(714285); -3,7.

2. $1\frac{1}{4}, \frac{11}{20}, \frac{7}{30}, 1\frac{5}{9}$

3. a) 25,6716 b) 101,24 c) 191,365.

4. a) -6,92; 13,827.

7

1. Tavsiye:

$\sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 1^2}, \sqrt{7} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2}, \sqrt{12} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}$.

2. a) 1,21 b) 4,28.

3. $(7,9)$, $(0,8]$, $(-\infty,5)$, $[-3,+\infty)$.

8

1. a) 284 b) 129 c) $3\frac{13}{44}$ ç) 31,135.

2. EBOB (250,220,210)=10, EKOK (250,220,210)=115 500.

4. a) $[-2,2]$ b) $[-2,5)$ c) $(-5,7)$.
6. 8 kg
7. 4π.

3. $-\sqrt{11} < -2,5(23) < -\frac{1}{5} < \frac{1}{7} < \sqrt{7} < 3,555.$

4. $1\frac{923}{990}$.

5. $\frac{2}{7} = 0,(285714); -\frac{1}{5} = -0,5; \frac{5}{11} = 0,(45);$
$-\frac{9}{20} = -0,45$
sonlu: $-\frac{1}{5} = -0,5; -\frac{9}{20} = -0,45$,
sonsuz
$\frac{2}{7} = 0,(285714); \frac{5}{11} = 0,(45).$

6. a) $(-7,12)$ b) $[-1,2]$.

7. 42 500 denar
8. 154,8 metre tel.
9. saat 11' de.
10. Yol 350km, $46\frac{2}{3}$ litre yakıt harcayarak 3080 denar harcamıştır?

Modüler birimi 3

1

a) yanlış, b) yanlış; c) doğru.

2. a) $x=0$; b) $x=1$; c) $x=-1$; ç) $x=3$.

3. a) $-27\frac{x^3 \cdot y^6}{z^9}$; b) $8\frac{c^9}{a^3b^6}$; c) $36a^{32}$

4. a) $7 \cdot 10^5$; b) $5 \cdot 10^4$; c) 10^6.

5. a) $x=2$ b) $x=\frac{4}{3}$ c) $x=10$.

2

1. a) katsayı $\frac{3}{5}$, baş değer $x^6y^5z^{10}$;

b) katsayı 20, baş değer a^4b^5c;

c) katsayı 1, baş değer b^2;

2. a) $4a^3b^3$; b) a^2b^4; c) $\frac{2}{3}b^8$.

3. a) $\frac{5}{2}a^6b^6$; b) $\frac{1}{25}a^8b^4$;

c) $-\frac{4}{3}x^4y^4z^5$

4. a) $2a^2b$ b) $8a^4b^6$ c) $5x^2y$
ç) x^3y^3 d) 1.

3

1. a) x^5+2x^3+2x+6
   b) $2a^3+a^2b-b^3$
2. a) $\frac{1}{2}xy-x^2y^2$
   b) $2a+2b+\frac{1}{2}ab-2a^2b^2$
3. $m=2,\ n=-3,\ p=1$

4

1. a) $x^4y^2-4x^3y^4+4x^2y^6$;
   b) $8x^3y^6-12x^4y^4+6x^5y^2-x^6$.
   c) $-\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{2}x^2y-9xy^2+8y^3$.
2. a) $\frac{9}{4}x^2-y^2$ b) $c^2+6bc+9b^2-a^4$
   c) $-125-\frac{1}{125}x^{12}$;
   ç) $\frac{27}{8}x^9+\frac{1}{64}x^6y^3$.
3. *Tavsiye:* a) terimleri gruplaştırınız:

$$\left(\underbrace{\left(2a^2b^2+ab\right)}_{A}-3\right)^2=\left(A-3\right)^2$$

bu şekilde üçterimlinin karesi, iki terimlinin (binomun) karesine dönüşür.

4. a) $\frac{43}{12}b^2-\frac{9}{4}a^2$;
   b) $-\frac{3}{2}a^4+a^3+b^4$; c) x^2+4.

5

1. a) $-3x^2-4xy-2y^2$;
   b) $-8x^2y-5xy^2+2y^3$.
2. a) $2a^3-a^2-8a+4$;
   b) bölüm $a^3-a^2-\frac{2}{3}a$
   ve kalan -1;

6

1. a) $x^3\cdot(16x-y)$;
   b) $2y\cdot(-x+10a)$;
   c) $\frac{5}{3}x^5\cdot\left(4x^{10}+2x^5-1\right)$.

c) bölüm $-x^3-2x^2+2x-4$ ve kalan $\frac{9}{2}x-7$;

ç) bölüm $4y^3-3y^2+y-\frac{39}{4}$ ve kalan $-\frac{37}{16}$.

2. a) $(x^2+y^2)(2a-b)$
   b) $(2a-b)(-b)$;
   c) $(y^2-y-)(x-1)(x+1)$.
   ç) $(y-4)(b+a)$
3. a) $(2-ax^2)(2+ax)$;
   b) $3(3x-y)(5x-2y)$;
   c) $(a-3)(x-5+y)$.
   ç) $(7b-3c)(4a-3)$
4. a) $(x+2)(x^2+3x-4)$
   b) $7a^2b(a+c)(b-2d)$
   c) $(x+y)(y^2-3y+1)$

7

1. a) $(x-5y)(x+5y)$;
   b) $(x-3-9y)(x-3+9y)$;
   c) $(x+3y-5)(x-3y+7)$;
   ç) $(n-5m)(5n-m)$.
2. a) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$;
   b) $(1-3x)(1+3x+9x^2)$;
   c) $(4x^2-3y)(16x^4+12x^2y+9y^2)$.
3. a) $(3-y)(3+y)(2x-1)$;
   b) $(2x-3)(2x+3)(y+1)(y^2-y+1)$
   c) $(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1)$
4. a) $4(a-1)(a^2+a+1)$;
   b) $(2b-3a)(4b^2+6ab+9a^2+2b+3a)$
   c) $(9+x^2)(3+x)(3-x)$

8

1. a) $(x-9)^2$; b) $\left(3a-\frac{1}{2}b\right)^2$ c) $(3b-5)^2$
2. a) $2(a+1)^2$; b) $\frac{1}{2}(a+4)^2$;
   c) $\frac{1}{3}(x-3)^2$.
3. a) $5(a-b-1)(a-b+1)$;
   b) $\left(x+\frac{1}{4}-y\right)\left(x+\frac{1}{4}+y\right)$;
   c) $(3x-y-1)(3x-y+1)$.
4. a) $-(b-c)^2(b+c)^2$;
   b) $(x+y+z)(x+y-z)$;
   c) $-(5y^2-2x^2)^2$.

9

1. a) x^2y; b) $(x-3y)$;

10

1. a) $x\neq 1-y$; b) $b\neq\frac{2}{7}$; c) $\forall x\in R$;

c) $(a-b)(a+b)$.

2. a) $12x^2y^2z^3$; b) $4(x-2y)(x+2y)^2$

c) $a(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$.

3. a) EBOB a^2+a+1;

EKOK $4x(a-1)(a^2+a+1)$;

b) EBOB $(x-2)$;

EKOK
$(x-2)(x+2)(3x+4)(x^2+4)(x^2-4x+4)$;

c) EBOB $(3-x)$;

EKOK $-(3-x)^3(3+x)(9+x^2)(1-2x)$;

$a\neq 0 \wedge b\neq 0$

ç)

2. a) $\frac{3}{5xz}$; b) $\frac{3x}{x-2y}$; c) $\frac{ay-2y}{x}$

$(x+y)(x^4+y^4)$

ç)

d) $\frac{x+y-z}{x-1}$.

11

1. a) $\frac{3b-2a}{3b}$; b) 0.
2. a) $\frac{2}{(a-b)}$; b) $\frac{x}{2y(x-2y)}$.
3. a) 1; b) $1-a$; c) $x+y$.
4. a) $\frac{1}{x^2(x+2)^2}$; b) $\frac{(1+a)^3}{(a+3)^6}$.
5. $\frac{1}{(1-a)(a+3)}$

12

1. a) x^{10}; b) x^6.
2. a) 37 b) 0 в) 20 г) 7
3. $\frac{2}{3}x^4y^2$
4. -21
5. a) $xy\left(y-\frac{17}{20}x\right)$ b) $-4a^2+25$.
6. a) $3x+2$ b) $2x^2+3x+4$
7. a) $(a+3)(a-2)(a+2)$

   b) $3(a+3)(a^2+3a+9)$
8. $\frac{a-1}{a+1}$, $a\neq -1$; b) $a-1$; c) $\frac{1}{3x^2-y^2}$.
9. a) -1 b) $4b-1$.
10. a) $\frac{x+18}{x^2-9}$; b) 2; c) $-\frac{1}{2}x^2$.
11. a) $\frac{ab(a+2b)}{2}$ b) $\frac{16a-21}{3(a-3)}$.

Modüler birimi 4

1

1. a) $1220m^3 = 1220\,000\,dm^3 = 122\cdot 10^4\ dm^3$

   b) $1220dm^3 = 1,22m^3$

   c) 1260 ml

   ç) 15,68 dl
2. 108 km/h
3. a) 25 000 g/m^3 b) $25\cdot 10^{-3}\ g/cm^3 = 0,025\,g/cm^3$
4. $5\cdot 10^5\ cm^2$
5. a) $0,25m^3$ b) 250 litre
6. a) 8100s b) 71h 13dak 44s
7. 2035,06kg

2

1. a) 108/49 b) 136

   c) 108/490 ç) 1,36

   d) 3/10 e) 3/10
2. $a = 3b$
3. $a = b/7$
4. 16kg miell
5. Sırasıyla 2080 denar, 1360 denar, 960 denar, 3000 denar.
6. Sırasıyla 3200 den., 2400 den., 1800 denar.

3

1. Sırasıyla 12kg, 8kg, 4kg, 3kg. Satın alınan domateslerin kütlesi ve fiyatları ters orantılıdır. Satın alınan domateslerin kütlesi ve toplam fiyat doğru orantılıdır.
2. 16 ton, 32 ton ve 56 ton. Doğru orantılı bağıntı.
3. 2 günde 15 kamyon, 3 günde 10 kamyon, 6 günde 5 kamyon, 10 günde 3 kamyon, 15 günde 2 kamyon. Ters orantılı büyüklükler.
4. Doğru orantılı: a), b), c), d). Ters orantılı:: ç), e).
5. a) 1000,1500,2500;

4

1. 420kg
2. 54 gün
3. 15t
4. Kalan iş 2 günde bitecektir, bütün iş 4 günde biter.
5. 15 gün

5

1. 640 fidan
2. 181 500 denar
3. 24 gün
4. 2 000 000 denar

6

1. 21,43%
2. 648 denar
3. 793,65 denar
4. 350cm
5. Mario, ödevlerin %60'ını çözmüş, %80 olması için daha 9 ödev çözmelidir.
6. Bütün karışım 1100kg, ikinci kısım 275kg, üçüncü kısım 605kg dır.
7. 25 öğrenci kontrol test yapmıştır.

7

1. 1. 24 000 denar
2. 2. 320 forma
3. 3. 130 öğrenci
4. 4. 46,3 l/m^2
5. 5 8475 denar
6. 6 2800 ekmek
7. 7 3250 ekmek

8

1. 6%
2. 2 yıl
3. 33280 denar
4. 160 000 denar
5. 480 denar
6. 365 gün
7. 24 000 denar
8. K = 55 000, i = 3080
9. K = 149949, i = 2699
10. K = 120020, i = 1480

9

1. 32 056 denar, 33 101 denar ve 34 843 denar
2. 18 000 denar
3. 210 937, 5 denar
4. 8 gün
5. yeni fiyat 7480 denar
6. 62,5kg
7. 20 700 denar ve 24 150 denar
8. %37,5 pek iyi, %25 çok iyi, %18,75 iyi, %12,5 memnun edici.
9. 2,6 ton
10. 15 273 denar
11. 4 yıl

Modüle' birimi 5

1

1. a) ve c).
2. a) ve c).
3. a) -4.
4. b) ve c).

2

1. a) $x=-3$ ya da $x=3$; b) $x=-10$ ya da $x=10$; c) $x=-5$ ya da $x=5$;

5. a) $x=-1$; b) $x=-6$; c) $x=-\frac{5}{2}$; ç) $x=\frac{17}{16}$.

6. a) $a \neq -\frac{5}{2}$ için, denklemin çözümü vardır; $a=-\frac{5}{2}$ için, denklemin çözümü yoktur

b) $a \neq -4$ için, denklemin çözümü vardır; $a=-4$ için, denklemin sonsuz çözümleri vardır.

7. a) $a=1$; b) $a=7$.

ç) $x=\frac{20}{7}$ ya da $x=-4$.

2. a) $x=0$ ya da $x=3$; b) $x=-\frac{5}{2}$ ya da $x=\frac{3}{4}$;

c) $x=\frac{5}{3}$ ya da $x=3$; ç) $x=0$ ya da $x=10$.

3. $x=-\frac{1}{2}$ ya da $x=\frac{3}{8}$.

3

1. a) $x=3$; b) $x=3$.
2. $x=8$, sayı ise $\frac{8}{11}$ der.
3. $x=5$, sayı ise 75 dir.
4. 4 mg.
5. $x=36$.
6. Kitabın normal fiyatı 500 denardır.

4

1. a).

2.eşitsizlikler çözülsün:

a) $x>1$,

b)eşitsizliğin çözümü yoktur;

c)$\mathbb{R}=(-\infty, +\infty)$;

ç) $x \geq -\frac{3}{10}$,

3. Verilen lineer eşitsizlikler çözülsün:

a) $x<1\frac{7}{11}$,

b) $x \geq 47$,

c) $x \leq \frac{5}{8}$,

ç) $x \leq -4$,

4.

$x \leq 0$,

5. Eşitsizliği sağlayan en büyük tam sayı –3 tür.

	6. $x > 5$ ise, $f(x)$ fonksiyonu pozitiftir. $x < 5$ ise, $f(x)$ fonksiyonu negatiftir. $f(x)$ fonksiyonun sıfırı $x = 5$ dir.

5

1. a) $x < -\frac{2}{3}$; b) $x > \frac{2}{5}$;

c) eşitsizlik sisteminin çözümü yoktur; ç) $x > 5$,

2. a) $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$; b) $(-2, 5)$.

3. a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$; b) $\left[-\frac{5}{2}, -1\right)$.

4. a) $-3 \leq x \leq 3$; b) $-6 < x < 1$; c) $-9 < x < 9$; ç) $-6 \leq x \leq 14$.

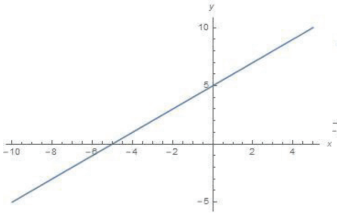
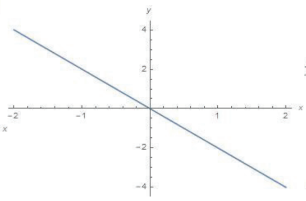
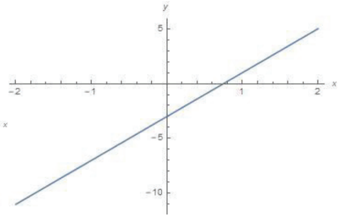
6

1. evet
2. $\frac{33}{16}$
3. a=1
4. 2, $\frac{4}{3}$.
5. 63, 21
6. değiller
7. $(-\infty, 20]$
8. $f(x) > 0, x \in (-\infty, 7)$; $f(x) < 0, x \in (7, +\infty)$, sıfırı x=7.
9. $(-\infty, \frac{1}{2})$.
10. $(-\infty, -7] \cup [13, +\infty)$

Modüler birimi 6

1

1. a) $f(-1) = 8$ b) $f(0) = 3$ c) $f(p) = -5p + 3$.
2. a) -2,1 b) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ c) 1,0.

3. a)  b)  c) 

4. k=1.

5. $f(x) = -2x + 1$.

6. a) lineer fonksiyonların grafikleri paraleldir
   b) lineer fonksiyonların grafikleri koordinat başlangıcından geçerler
   c) lineer fonksiyonların grafikleri (0, -3) noktasından geçerler

2

1. a) (2,0), (0,1) b) $(\frac{3}{5},0)$, (0,-3) c) $(\frac{1}{7},0),(0,-\frac{1}{7})$.

2. a) k=0 b) k=0 c) k>-1 ç) k<-1 d) k=-1

3. hayır

4. k=1

5. $k=\frac{1}{3}$

3

1. (0,3),(-1,2)...

2. $3x - 3y = 2$

3. (1,1)

4. a) $\begin{cases} 105x + 100y = 14 \\ 49x + 35y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 34x - 6y = 35 \\ 14x - 63y = 10 \end{cases}$.

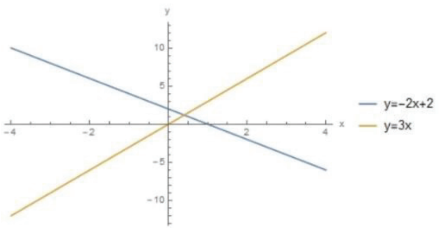
4

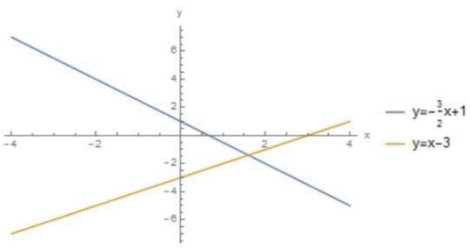
1. a) (1,1) b)(-82,-18) c)$(\frac{19}{126},\frac{23}{18})$ ç)$(1\frac{7}{16},\frac{3}{16})$.

2. a) $(5\frac{1}{4},21)$ b) $(4\frac{1}{20},-\frac{9}{20})$.

5

1. a) (1,1) b) $(\frac{12}{5},-\frac{3}{5})$ c) $(1\frac{7}{16},\frac{3}{16})$.

2. a) 

b) 

6

1. a) $\frac{2}{5}$ б) -9,02671 c) $\frac{a^2}{a-1}$.

2. a) (9,21) b) $(1\frac{13}{35}, -1\frac{6}{7})$.

3. a) $a \neq -2$ için, sistemin bir tek çözümü vardır $x = a, y = -a$. $a = -2$ için sistemin sonsuz çok çözümleri vardır.

b) $a \neq -3b$ için, sistemin bir tek çözümü vardır $x = \frac{3}{a+3b}, y = \frac{3b-a}{a+3b}$.

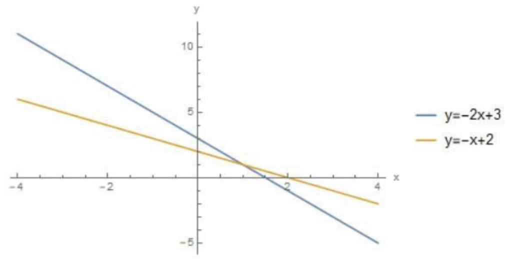
$a = -3b$ sistemin çözümü yoktur.

7

1. $\frac{7}{9}$
2. 78
3. 12 tavuk ve 15 kuzu
4. 524,3.
5. 9 saat ve 6 saat, 540 km.
6. 30 ve 2.
7. 8 saat ve 12 saat
8. 30 km/h ve 28,8 km/h

8

1. a) k=2 b) k=0 c) k>1 ç) k<1 d) k=1.
2. k=3/2
3. a) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 2x-5y=-7 \end{cases}$
4. $(3\frac{1}{7}, -4\frac{2}{7})$
5. $(21,5;19,5)$
6. $(3\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$



7.
8. (1,1)
9. $k \neq 1$ bir tek çözümü vardır. $k = 1$ için çözümü yoktur.
10. a) 52 b) her ikisinden 25'er litre.

Modüler birimi 7:

1

2. Nokta ve doğru.
4. a) Hipotez: Bir sayı 6 ile bölünür;
   Sonuç: O sayı 2 ve 3 ile bölünür.
   b) Hipotez: Yamuk ikizkenardır;
   Sonuç: köşegenleri birbirine eşittir.
   c) Hipotez: Dörtgen paralelkenardır.
   Sonuç: köşegenleri birbirine eşittir.
5. Tavsiye: a) ve b) ters teoremi vardır; c) ters iddia yoktur.
6. a) Koşullu şekilde, b) kategorik şekilde.
7. Hipotez: Bir sayı 2 ve 5 ile bölünüyor. Sonuç: Sayı 10 ile bölünüyor. Kategorik şekilde: 2 ve 5 ile bölünen sayı 10 ile de bölünür.
8. Koşullu şekilde: Bir dörtgen kirişler dörtgeni ise, onun karşıt açıları eşittir. Hipotez: Dörtgen, kirişler dörtgenidir. Sonuç: Karşıt açıları bütünler açılardır.

2

3. 1,5,6,8 ya da 10 doğru
4. 1 nokta
5. 1 ya da 4.

3

1. 4 yarı doğru, 2 çift birbirinin uzantısı olan yarı doğru.
2. 8 yarı doğru, 4 çift birbirinin uzantısı olan yarı doğru.
3. $\gamma = 140^0 17'13'', \delta = 89^0 46'47''$ γ açısını bütünleyen açı $39^0 42'47''$ dir. δ açısına ise $90^0 13'13''$ dir.
4. $11^0 44'47''$ ve $101^0 44'47''$
5. $\gamma = 53^0 15'54''$
6. Bütünleyen açılar

4

2. 10 doğru parçası.
3. 3 doğru parçası üçgen oluşturuyorlar.
4. Bir köşesinden 12 köşegen ve toplam 90 köşegen.
5. 18-gen,
6. 1440^0
7. sekizgen

5

3. 15 cm
4. $45^0 35' 48''$
5. 120^0, 80^0, 100^0, 60^0.

6

1. Dörtgen, kirişler dörtgeni ise onun karşıt açıları bütünler açılardır.
   Hipotez: Kirişler dörtgenidir.

Sonuç: Karşıt açıları bütünler açılardır.
2.1, 4, 6.
3.40^0, 60^0, 80^0.
4.103^0 36’, 76^0 24’ .
5.6-gen
6.54^0, 81^0, 108^0, 135^0, 162^0.
7.10-gen, 7 köşegen
8.8 cm
9.Çevre açı $48^0$18’07”, merkez açısı ise $96^0$36’14”
10. $114^0$35’, $54^0$26’.

Modüler birimi 8:

1

1. a) Çevre 3 defa, alan ise 9 defa artacaktır.
   b) Çevre 3 defa, alan ise 9 defa azalacaktır.
2. $L=36\sqrt{2}cm$, $P=162cm^2$
3. $L=36cm$, $d=9\sqrt{2}cm$
4. $L=\left(12+12\sqrt{2}\right)cm$, $P=\left(27+18\sqrt{2}\right)cm^2$
5. $L=24\sqrt{3}cm$
6. $L=42cm$, $P=108cm^2$
7. 21cm и 14cm

2

1. 1,2cm ve 0,8cm
2. 12 cm
3. Köşegenler 25cm ve 39cm dir.
4. $P=204cm$, $S=2204cm^2$
5. 40,5cm^2
6. $S=120cm^2$

3

1. $P=12cm^2$, $L=16cm$
2. $L=18\sqrt{3}cm$, $P=27\sqrt{3}cm^2$
3. 3. L= 30cm. Tavsiye: Heron formülünü uygulayarak $144 \cdot 5 = s(s-7)(s-9)(16-s)$ eşitliği elde edilir, yani $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot=s(s-7)(s-9)(16-s)$. Oradan $s \geq 10$ olduğunu görüyoruz. s, eşitliğin sol tarafındaki çarpanların biçiminde yazılmalıdır. s =10cm için eşitlik sağlanmadığına göre s =15cm için eşitlik geçerlidir.
4. $L=12cm$, $P=6cm^2$
5. $L=50cm$, $P=120cm^2$
6. $r=3cm$, $R=12,5cm$
7. $r=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}cm$, $R=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}cm$

	8. $r=3cm$, $R=6,25cm$ 9. $c=6\sqrt{34}cm$ 10. $L=60cm$, $P=150cm^2$
4 1. $b=14cm$, $m=24cm$ 2. $a=16cm$, $b=9cm$ 3. $P=276cm^2$ 4. $L=62cm$, $P=204cm^2$ 5. Tavsiye: $\overline{AC}$ köşegeniyle trapezoit, alanları Heron formülüyle hesaplanabilen iki üçgene ayrılır. 6. $L=32cm$, $P=\left(12+12\sqrt{7}\right)cm^2$ 7. $L=128cm$	**5** 1. $R=6,5cm$, $L=52cm$, $P=169cm^2$ 2. $r=3\sqrt{2}cm$, $L=24\sqrt{2}cm$, $P=72cm^2$ 3. $d=14cm$, $P=24\sqrt{10}cm^2$ 4. $d_1=12cm$, $d_2=16cm$, $P=96cm^2$ 5. $r=4\sqrt{2}cm$, $P=64cm^2$ 6. $L=48cm$ 7. $P=18cm^2$
6 1. $P=21cm$, $P=42cm^2$ 2. $P=88cm$, $P=132cm^2$ 3. $P=40\sqrt{3}cm$, $P=200\sqrt{3}cm^2$ 4. Merkez ve dış açı 40^0 dir, iç açı 140^0 dir.	**7** 1. $L=10\pi\, cm$ 2. 2. $L_1=10\pi\, cm$, $P_1=25\pi\, cm^2$, $L_2=5\sqrt{2}\pi\, cm$, $P_2=\frac{25}{2}\pi\, cm^2$ 3. $L_1:L_2=2:3$, $P_1:P_2=4:9$ 4. $R=4cm$ 5. $R_1=2R_2$ 6. $L_1=4\sqrt{5}\,\pi\, cm$, $P_1=20\pi\, cm^2$, $L_2=6\sqrt{5}\,\pi\, cm$, $P_2=45\pi\, cm^2$ 7. $L=6\sqrt{3}\,\pi\, cm$, $P=27\pi\, cm^2$

8	9
1. $l = \frac{17\pi}{4} cm$	1. Kenarlar 7cm ve 4cm dir..
2. $l = 3{,}1\pi\, cm$	2. $L = 34cm$
3. $\alpha = 92^0 44'$	3. $P = \frac{128}{3} cm^2$
4. 4cm	4. $P = 32\sqrt{3}\, cm^2$
5. 13 cm ve 7 cm	5. $a = 32cm$, $b = 28cm$, $P = 64\sqrt{3}\, cm^2$
6. $18\pi cm^2$	6. $a = 6cm$, $h = 12cm$
7. $P = 18{,}5\pi\, cm^2$	7. $P = 27\sqrt{3}\, cm^2$
8. $r = 14cm$, $P = 196\pi\, cm^2$	8. $L = 388{,}7cm$, $P = 8316cm^2$
9. $\alpha = 146^0 15'$	9. $L = 10\pi\, cm$
10. $P = \frac{162\pi - 243\sqrt{3}}{12} cm^2$	10. $r = 14cm$
	11. $r = 2\sqrt{13}\, cm$